# X-MAT

## Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 2

2ª edição

# AFA 2010-2016

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Academia da Força Aérea (AFA) dos anos de 2010 a 2016 detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto, totalizando 128 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 7 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da AFA ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

**Renato de Oliveira Caldas Madeira** é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestrando em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog “Mademática”.

**AGRADECIMENTOS**

Gostaria de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante a elaboração dessa obra, e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira

# CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2015/2016

1) Uma fábrica produz casacos de determinado modelo. O preço de venda de um desses casacos é de R$ 200,00, quando são vendidos 200 casacos. O gerente da fábrica, a partir de uma pesquisa, verificou que, para cada desconto de R$ 2,00 no preço de cada casaco, o número de casacos vendidos aumenta de 5. A maior arrecadação possível com a venda de casacos acontecerá se a fábrica vender cada casaco por um valor, em reais, pertencente ao intervalo

a) $[105,125[$

b) $[125,145[$

c) $[145,165[$

d) $[165,185[$

2) Considere no Plano de Argand-Gauss os números complexos $z = x + yi$, onde $i = \sqrt{-1}$ e cujos afixos são os pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dada a equação $(z - 1 + i)^4 = 1$, sobre os elementos que compõem seu conjunto solução, é INCORRETO afirmar que

a) apenas um deles é imaginário puro.

b) todos podem ser escritos na forma trigonométrica.

c) o conjugado do que possui maior argumento é $1 + 2i$.

d) nem todos são números imaginários.

3) Considere as expressões $A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \ldots + 5^2 - 3^2$ e $B = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \cdot \ldots$. O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

a) 117 e 120

b) 114 e 117

c) 111 e 114

d) 108 e 111

4) Considere os polinômios $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $P(x) = x^3 - 3x^2 - ax + b$, sendo a e b números reais tais que $a^2 - b^2 = -8$. Se os gráficos de $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então é INCORRETO afirmar sobre as raízes de $P(x)$ que

a) podem formar uma progressão aritmética.

b) são todas números naturais.

c) duas são os números a e b.

d) duas são números simétricos.

5) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração. A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é
a) $8 \cdot 7!$
b) $7!$
c) $5 \cdot 4!$
d) $10!$

6) Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 têm espinhos e o vaso B contém 8 rosas sendo que exatamente 6 não têm espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. A probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos é
a) $\frac{8}{81}$
b) $\frac{15}{81}$
c) $\frac{18}{81}$
d) $\frac{23}{81}$

7) Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Sabe-se que $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n vezes}}$. Então, o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$ é igual a
a) 1
b) $-31$
c) $-875$
d) $-11$

8) Considere os pontos $A(4,-2)$, $B(2,0)$ e todos os pontos $P(x,y)$, sendo x e y números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo. É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos $P(x,y)$ são tais que
a) são equidistantes de $C(2,-1)$.
b) o maior valor de x é $3+\sqrt{2}$.
c) o menor valor de y é $-3$.
d) x pode ser nulo.

9) Analise as proposições abaixo e escreva V para a(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

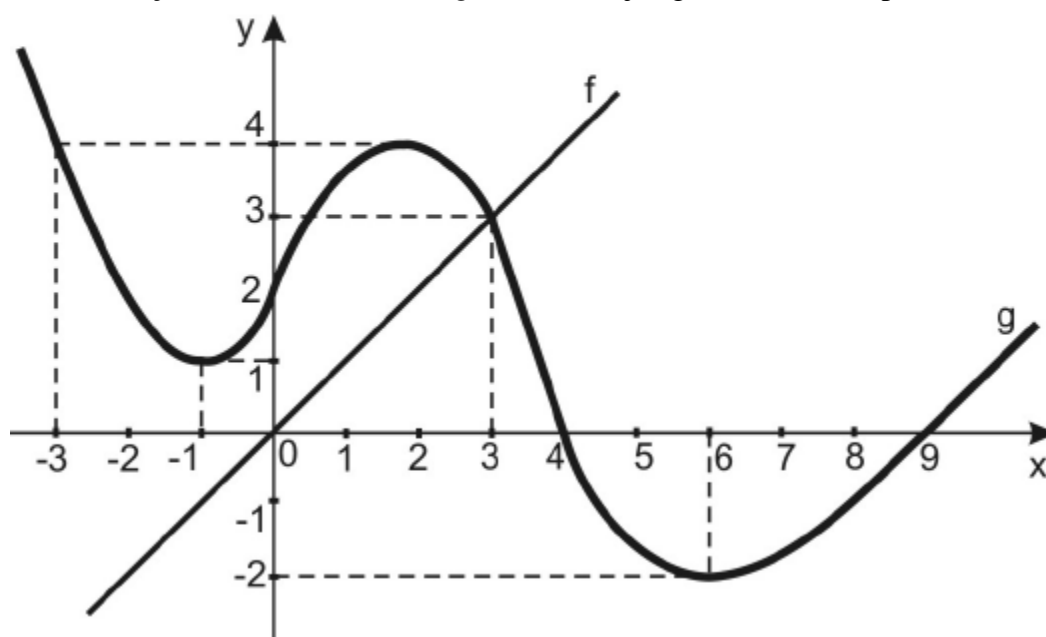
I) ( ) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2+4x-4=0$ é igual a 1 unidade de comprimento.

II) ( ) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.

III) ( ) A equação $2x^2+y^2-4x-4y+4=0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto $P(1,4)$.

A sequência correta é

a) F – F – V
b) V – F – V
c) F – V – F
d) V – V – F

10) Considere as funções reais $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados abaixo.

Sobre essas funções, é correto afirmar que

a) $\forall x\in[0,4],\ g(x)-f(x)>0$

b) $f(g(0))-g(f(0))>0$

c) $\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{[f(x)]^2}\le 0,\ \forall x\in\,]-\infty,0[\,\cup[4,9]$

d) $\forall x\in[0,3]$ tem-se $g(x)\in[2,3]$

11) Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contatou dois eletricistas. O Sr. Luiz que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:

Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento. Com relação às informações acima, é correto afirmar que

a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00.
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

12) Considere as funções reais f, g e h tais que

$f(x) = mx^2 - (m+2)x + (m+2)$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = \sqrt{x}$

Para que a função composta $h \circ g \circ f(x)$ tenha domínio $D = \mathbb{R}$, deve-se ter

a) $m > \frac{2}{3}$

b) $-2 < m < \frac{2}{3}$

c) $0 < m < \frac{2}{3}$

d) $-2 < m < 0$

13) Considere a função real f definida por $f(x) = a^x$ com $a \in ]0,1[$. Sobre a função real g definida por $g(x) = |-b - f(x)|$ com $b \in ]-\infty, -1[$, é correto afirmar que

a) possui raiz negativa e igual a $\log_a(-b)$.
b) é crescente em todo o seu domínio.
c) possui valor máximo.
d) é injetora.

14) Considere a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$. Sobre f é FALSO afirmar que

a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) f é par.

c) f é injetora.

d) $B = \{2\}$.

15) Considere a região E do plano cartesiano dada por $E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \\ y + x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de $270°$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a

a) $\frac{26\pi}{3}$

b) $26\pi$

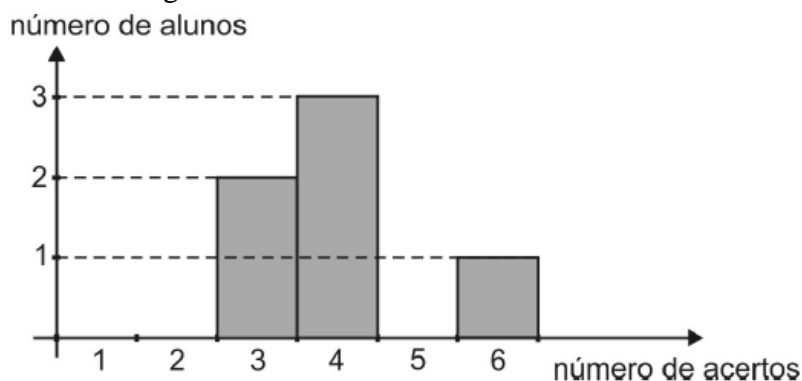
c) $\frac{13\pi}{2}$

d) $\frac{13\pi}{3}$

16) Um cursinho de inglês avaliou uma turma completa sendo que parte dos alunos fez a avaliação A, cujo resultado está indicado no gráfico abaixo.

Os demais alunos fizeram a avaliação B e todos tiveram 4 acertos. Assim, o desvio padrão obtido a partir do gráfico acima ficou reduzido à metade ao ser apurado o resultado da turma inteira. Essa turma do cursinho de inglês tem

a) mais de 23 alunos.

b) menos de 20 alunos.

c) 21 alunos.

d) 22 alunos.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2014/2015

1) Considerando a circunferência de equação $\lambda: x^2+y^2+2x-4y-4=0$, é correto afirmar que

a) $\lambda$ é concêntrica com $\alpha:(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

b) o ponto $O(0,0)$ é exterior a $\lambda$.

c) a reta $r: x-y+3=0$ é tangente a $\lambda$.

d) $\lambda$ é simétrica da circunferência $\beta:(x-1)^2+(y+2)^2=9$, em relação ao ponto $O(0,0)$.

2) Seja o quadrado $ABCD$ e o ponto $E$ pertencente ao segmento $\overline{AB}$. Sabendo-se que a área do triângulo $ADE$, a área do trapézio $BCDE$ e a área do quadrado $ABCD$ formam juntas, nessa ordem, uma Progressão Aritmética (P.A.) e a soma das áreas desses polígonos é igual a $800\text{ cm}^2$, tem-se que a medida do segmento $\overline{EB}$

a) é fração própria.

b) é decimal exato.

c) é decimal não exato e periódico.

d) pertence ao conjunto $A=\mathbb{R}_+^*-\mathbb{Q}_+$.

3) Considere num mesmo sistema cartesiano ortogonal as funções reais $f$, $g$ e .. tais que:

- $f$ é uma função quadrática que contém o ponto $S$ simétrico do ponto $P(0,-27)$, em relação ao eixo $\overrightarrow{OX}$;
- $g$ é a função afim que passa pelos pontos $Q(-1,12)$ e $R(3,0)$;
- os pontos $Q$ e $R$ também pertencem à função $f$;
- $h$ é uma função constante cujo gráfico intercepta o gráfico da função $g$ no ponto de abscissa $-7$.

Analise os gráficos das funções $f$, $g$ e $h$ e marque a alternativa correta.

a) $g(x)\ge f(x)$ se, e somente se, $\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge 3\}$.

b) A função real $j$ dada por $j(x)=\sqrt{-f(x)\cdot g(x)}$ está definida se, e somente se, $x\in\left]-\infty,3\right]$.

c) Se $-1\le x\le 3$, então $f(x)\ge g(x)$.

d) $f(x)<g(x)\le h(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ tal que $x\ge -7$.

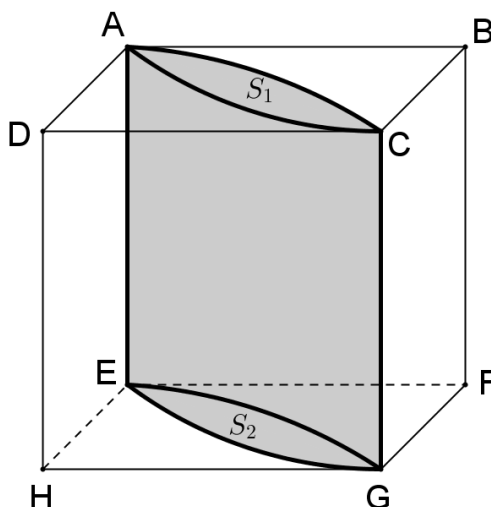
4) Considere o polinômio $p(x)=ax^4+bx^3+2x^2+1$, $\{a,b\}\subset\mathbb{R}$ e marque a alternativa FALSA.

a) $x=0$ não é raiz do polinômio $p(x)$.

b) Existem valores distintos para $a$ e $b$ tais que $x=1$ e $x=-1$ são raízes de $p(x)$.

c) Se $a=0$ e $b=3$, o resto da divisão de $p(x)$ por $3x^2-x+1$ é zero.

d) Se $a=b=0$ tem-se que $x=-\frac{1}{2}i$ é uma raiz de $p(x)$, considerando que $i^2=-1$.

5) Na figura abaixo, tem-se um cubo cuja aresta mede $k$ centímetros; as superfícies $S_1$ e $S_2$, contidas nas faces desse cubo, são limitadas por arcos de circunferências de raio $k$ centímetros e centros em, respectivamente, $D$ e $B$, $H$ e $F$.

O volume do sólido formado por todos os segmentos de reta com extremidades em $S_1$ e $S_2$, paralelos a $\overline{CG}$ e de bases $S_1$ e $S_2$, é, em $cm^3$, igual a

a) $\frac{k^3(\pi-1)}{2}$

b) $\frac{k^3(\pi-2)}{2}$

c) $\frac{k^3(\pi-1)}{4}$

d) $\frac{k^3(\pi-2)}{4}$

6) Considere os números complexos $z_1 = x - i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = -1 + 2i$ e $z_4 = x + yi$ em que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ e $i^2 = -1$ e as relações:

I. $\operatorname{Re}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \leq \operatorname{Im}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$

II. $|z_3 \cdot z_4| = \sqrt{5}$

O menor argumento de todos os complexos $z_4$ que satisfazem, simultaneamente, as relações I e II é

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $0$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{3}$

7) Alex possui apenas moedas de $25$ centavos, de $50$ centavos e de $1$ real, totalizando $36$ moedas. Sabe-se que a soma do número de moedas de $25$ centavos com o dobro do número de moedas de $50$ centavos é igual à diferença entre $82$ e $5$ vezes o número de moedas de $1$ real. Nessas condições é correto afirmar que

a) esse problema possui no máximo $7$ soluções.
b) o número de moedas de $25$ centavos nunca será igual ao número de moedas de $50$ centavos.
c) o número de moedas de $50$ centavos poderá ser igual à soma do número de moedas de $25$ centavos com as de $1$ real.
d) o número de moedas de $1$ real pode ser $3$.

8) Nas expressões $x$, $y$ e $z$, considere a simbologia:

- $\log$ é o logaritmo decimal;
- $i$ é a unidade imaginária dos números complexos;
- $\text{sen}$ é o seno de um arco; e
- $n!$ é o fatorial de $n$.

Se $x = \dfrac{3\log(100!)}{\log 1 + \log 8 + \log 27 + \cdots + \log 100^3}$, $y = \dfrac{i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100}}$ e

$z = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}(\alpha + \pi) + \text{sen}(\alpha + 2\pi) + \cdots + \text{sen}(\alpha + 99\pi)$, então o valor de $x^y + z$ é

a) $0$
b) $1$
c) $2$
d) $3$

9) Considere as funções reais $f$ e $g$ definidas por $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\text{sen}(2x) & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$, $g(x) = \dfrac{1}{2} - f(x)$

e marque a alternativa INCORRETA.

a) O conjunto imagem da função $f$ é o intervalo $[0,1]$.
b) A função $g$ é ímpar.
c) A função real $h$ definida por $h(x) = -\dfrac{1}{2} + g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
d) O período da função real $j$ definida por $j(x) = \left|-\dfrac{1}{2} + g(x)\right|$ é $\dfrac{\pi}{2}$.

10) Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:

I. obrigatoriamente, conhecer o estádio do Maracanã.
II. se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em $12$ estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação I e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação II, nessa ordem, é

a) $\dfrac{11}{26}$

b) $\frac{13}{25}$

c) $\frac{13}{24}$

d) $\frac{11}{24}$

11) Considere as seguintes simbologias em relação à matriz $M$:

$M^t$ é a matriz transposta de $M$

$M^{-1}$ é a matriz inversa de $M$

$\det M$ é o determinante da matriz $M$

Da equação $\left(X^t\right)^{-1} = A \cdot (B+C)$, em que $A$ e $(B+C)$ são matrizes quadradas de ordem $n$ e inversíveis, afirma-se que

I. $X = \left(A^{-1}\right)^t \cdot \left[(B+C)^{-1}\right]^t$

II. $\det X = \frac{1}{\det A \cdot \det(B+C)}$

III. $X^{-1} = \left(B^t + C^t\right) \cdot A^t$

São corretas

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) I, II e III.

12) Um jogo é decidido com um único lançamento do dado cuja planificação está representada abaixo.

Participam desse jogo quatro pessoas: Carlos, que vencerá o jogo se ocorrer face preta ou menor que $3$; José que vencerá se ocorrer face branca e número primo; Vicente vencerá caso ocorra face preta e número par; Antônio vencerá se ocorrer face branca ou número menor que $3$.

Nessas condições, é correto afirmar que

a) Vicente não tem chance de vencer.

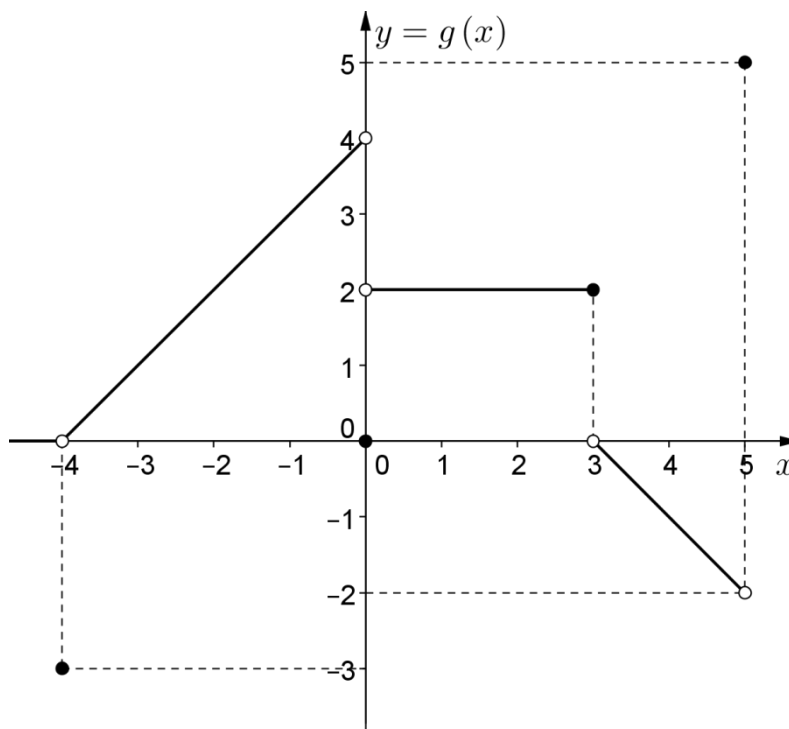
b) Carlos tem, sozinho, a maior probabilidade de vencer.

c) a probabilidade de José vencer é o dobro da de Vicente.

d) a probabilidade de Antônio vencer é maior do que a de Carlos.

13) Considere a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x - b$, em que $0 < a < 1$ e $b > 1$. Analise as alternativas abaixo e marque a FALSA.

a) Na função $f$, se $x > 0$, então $-b < f(x) < 1 - b$.
b) $\text{Im}(f)$ contém elementos menores que o número real $-b$.
c) A raiz da função $f$ é um número negativo.
d) A função real $h$, definida por $h(x) = f(|x|)$ não possui raízes.

14) Considere o gráfico da função $g: A \to A$ abaixo e marque (V) verdadeiro ou (F) falso.

( ) A função $g$ possui exatamente duas raízes.
( ) $g(4) = -g(-3)$
( ) $\text{Im}(g) = \{-3\} \cup ]-2, 4[$
( ) A função definida por $h(x) = g(x) + 3$ NÃO possui raiz.
( ) $(g \circ g \circ g \circ \ldots \circ g)(-2) = 2$
A sequência correta é
a) F – V – F – F – V
b) F – F – V – F – V
c) F – V – F – V – F
d) V – V – F – F – V

15) Considere no plano cartesiano um triângulo equilátero $ABC$ em que:
• os vértices $B$, de abscissa positiva, e $C$, de abscissa negativa, estão sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$;
• possui baricentro no ponto $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
Considere também, nesse mesmo plano cartesiano, a circunferência $\lambda_1$ inscrita e a circunferência $\lambda_2$ circunscrita ao triângulo $ABC$.
Analise as proposições abaixo e escreva (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) A reta $r$, suporte do lado $AB$, passa pelo ponto $(-1, b)$, em que $b$ é o dobro do oposto do coeficiente angular de $r$.

( ) O círculo delimitado por $\lambda_2$ contém o ponto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

( ) O ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$ pertence a $\lambda_1$.

A sequência correta é
a) V – F – V
b) F – F – V
c) V – F – F
d) F – V – F

16) No Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil 2013 constam valores do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) de todas as cidades dos estados brasileiros.
O IDHM é um número que varia entre $0$ e $1$. Quanto mais próximo de $1$, maior o desenvolvimento humano de um município, conforme escala a seguir.

Abaixo estão relacionados o IDHM de duas cidades de Minas Gerais em condições extremas, Monte Formoso e Uberlândia, e uma situação intermediária, Barbacena.

Analisando os dados acima, afirma-se que
I. o município de maior crescimento do IDHM, nos períodos considerados, é Monte Formoso.

II. na última década, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia.
III. uma tabela que relaciona cidade, época e faixa de IDHM pode ser representada corretamente como:

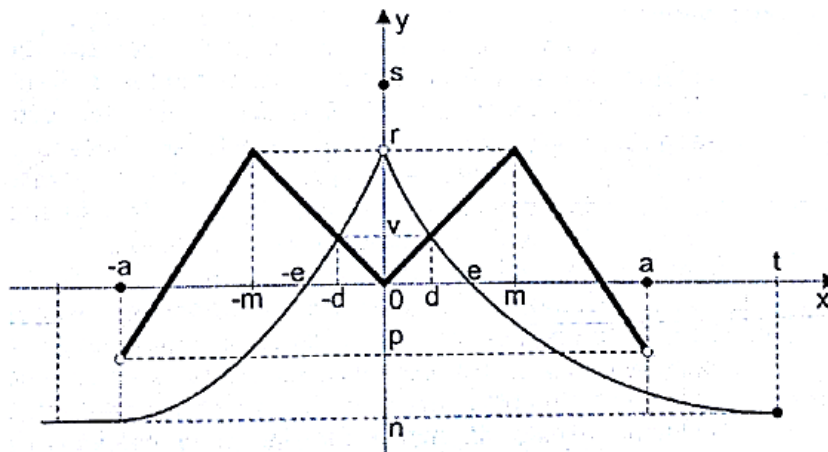
| | Monte Formoso | Barbacena | Uberlândia |
|---|---|---|---|
| 1991 | Muito baixo | Baixo | Baixo |
| 2000 | Muito baixo | Alto | Alto |
| 2010 | Baixo | Alto | Alto |

São corretas:
a) apenas I e II.
b) apenas II e III.
c) apenas I e III.
d) I, II e III.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2013/2014

1) A equação $x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ possui as raízes $m$, $p$ e $q$. O valor da expressão $\frac{m}{pq} + \frac{p}{mq} + \frac{q}{mp}$ é
a) $-2$
b) $-3$
c) $2$
d) $3$

2) Distribuiu-se, aleatoriamente, $7$ bolas iguais em $3$ caixas diferentes. Sabendo-se que nenhuma delas ficou vazia, a probabilidade de uma caixa conter, exatamente, $4$ bolas é
a) 25%
b) 30%
c) 40%
d) 48%

3) Considere os gráficos abaixo das funções reais $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: B \to \mathbb{R}$. Sabe-se que $A = [-a, a]$; $B = ]-\infty, t]$; $g(-a) < f(-a)$; $g(0) > f(0)$; $g(a) < f(a)$ e $g(x) = n$ para todo $x \leq -a$.

Analise as afirmativas abaixo e marque a **FALSA**.
a) A função $f$ é par.
b) Se $x \in ]d, m[$, então $f(x) \cdot g(x) < 0$.
c) $\text{Im}(g) = [n, r[ \cup \{s\}$
d) A função $h: E \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{-2}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ está definida se $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x < -d \text{ ou } d < x \leq a\}$.

4) Sejam $f$ e $g$ funções reais dadas por $f(x) = \left|\frac{\text{sen } 2x}{\cos x}\right|$ e $g(x) = 2$, cada uma definida no seu domínio mais amplo possível.
Analise as afirmações abaixo.

I) O conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ contém infinitos elementos.

II) No intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, a função $f$ é crescente.

III) O período da função $f$ é $p = \pi$.

Sobre as afirmações é correto afirmar que

a) apenas III é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) todas são falsas.
d) apenas II e III são verdadeiras.

5) Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre um tubo cilíndrico.
A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres do quadrado foi construído um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ metro.

2ª) Em cada um dos vértices livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado $\frac{1}{4}$ de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior.
A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.

Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

b) $\left(\frac{3}{8}\right)^8$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$

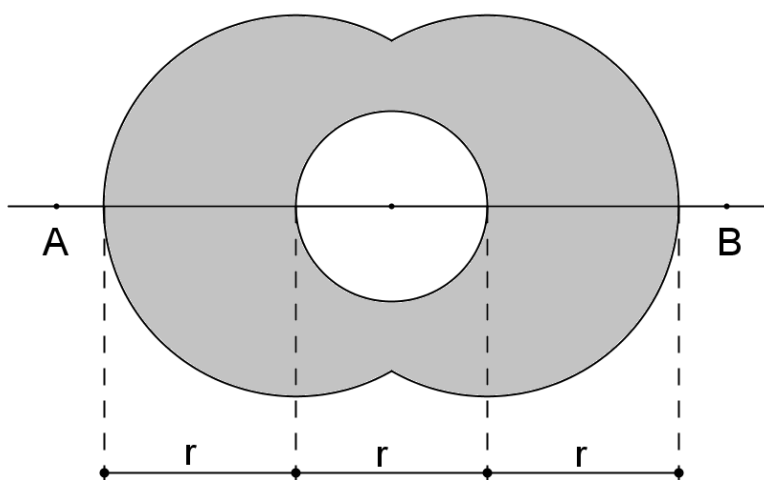
6) A circunferência $\lambda$ é tangente à reta $r: y = \frac{3}{4}x$ e também é tangente ao eixo das abscissas no ponto de abscissa $6$. Dentre as equações abaixo, a que representa uma parábola que contém a origem do plano cartesiano e o centro de $\lambda$ é

a) $12(y-x)+x^2=0$

b) $3y^2-12y+2x=0$

c) $2y^2-3x=0$

d) $12y-x^2=0$

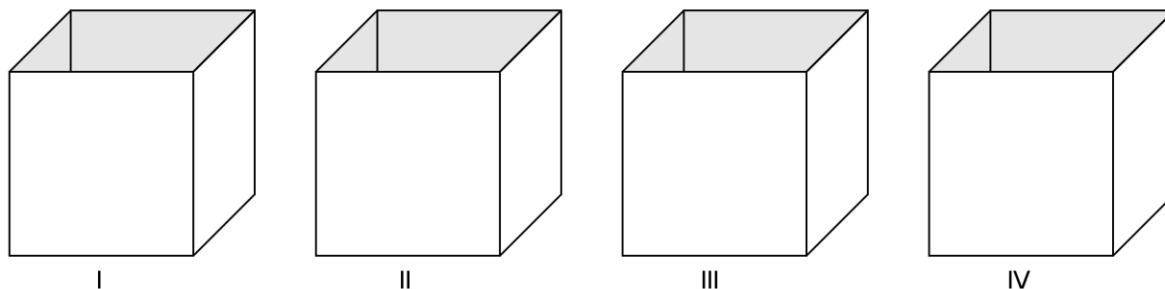
7) Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta $AB$ e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.

A expressão que fornece o valor da área sombreada é

a) $\frac{17\pi-6\sqrt{3}}{9}r^2$

b) $\frac{11\pi+9\sqrt{3}}{12}r^2$

c) $\frac{15\pi-4\sqrt{3}}{9}r^2$

d) $\frac{13\pi+6\sqrt{3}}{12}r^2$

8) Sr. José deseja guardar $4$ bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em $4$ caixas numeradas:

O número de maneiras de Sr. José guardar todas as $4$ bolas de forma que uma mesma caixa **NÃO** contenha mais do que duas bolas, é igual a
a) $24$
b) $36$
c) $144$
d) $204$

9) Um tanque com capacidade de $300$ litros de água possui duas torneiras: I e II.
A torneira I despeja água no tanque a uma vazão de $2\,\ell$ por minuto. Já a torneira II retira água do tanque a uma vazão de $\frac{1}{2}\,\ell$ por minuto.
Às $8\text{ h}$ de certo dia, com o tanque vazio, a torneira I foi aberta e, após $15$ minutos foi fechada.
Às $9\text{ h}$ e $30\text{ min}$ as duas torneiras foram abertas, e assim permaneceram até $11\text{ h}$ e $30\text{ min}$.
Neste horário a torneira II é fechada, mas a torneira I permanece aberta até o momento em que a água atinge a capacidade do tanque.
Este momento ocorre às
a) $12\text{ h}$ e $10\text{ min}$
b) $12\text{ h}$ e $15\text{ min}$
c) $12\text{ h}$ e $20\text{ min}$
d) $12\text{ h}$ e $25\text{ min}$

10) Considere uma pirâmide regular $ABCDV$ de base $ABCD$. Sendo $2\sqrt{2}\text{ cm}$ a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}\text{ cm}$ a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de $A$ à aresta lateral $VC$ é
a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $4$
d) $\sqrt{3}$

11) No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas $r$, $s$, $t$ e $z$.

Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, $AT$, $TP$ e $PB$, pode ser calculado, como função de $\alpha$, por

a) $\sec\alpha$
b) $\operatorname{cossec}\alpha$
c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha$
d) $\operatorname{cossec}\alpha+\sec\alpha$

12) O sistema linear nas incógnitas $x$, $y$ e $z$ abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases}(\operatorname{sen} a)x+y-z=0\\ x-(\operatorname{sen} a)y+z=1\\ x+y=\cos a\end{cases}$$

Sobre o parâmetro $a$, $a\in\mathbb{R}$, pode-se afirmar que

a) $a=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
b) $a=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
c) $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
d) $a=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

13) Seja $f$ uma função quadrática tal que:

- $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$
- tem gráfico interceptando o gráfico da função $g$, dada por $g(x)=2$, num único ponto cuja abscissa é $2$
- seu gráfico possui o ponto $Q$, simétrico do ponto $R(0,-3)$ em relação à origem do sistema cartesiano.

Seja $h$ uma função afim cujo gráfico intercepta o gráfico de $f$ no eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e no ponto de menor ordenada de $f$.

Assim sendo, o conjunto solução da inequação $\frac{[f(x)]^3 \cdot [g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}} \geq 0$ contém o conjunto

a) $[0,8]$

b) $[1,7]$

c) $[2,6]$

d) $[3,5]$

14) Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de $2013$, a população de pássaros da espécie $A$ era $12$ vezes a população de pássaros da espécie $B$.
Sabe-se que a população de pássaros da espécie $A$ cresce a uma taxa de $5\%$ ao ano, enquanto que a população de pássaros da espécie $B$ cresce a uma taxa de $20\%$ ao ano.
Com base nesses dados, é correto afirmar que, essas duas populações de pássaros serão iguais
(Considere: $\log 7 = 0,85$; $\log 6 = 0,78$; $\log 2 = 0,3$)

a) no 1º semestre do ano de $2034$.
b) no 2º semestre do ano de $2034$.
c) no 1º semestre do ano de $2035$.
d) no 2º semestre do ano de $2035$.

15) Considere no plano complexo, o conjunto dos números $z = x + yi$; $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ que satisfazem a condição $|z| \geq |2z+1|$.
É **FALSO** afirmar que

a) este conjunto pode ser representado por um círculo de raio igual a $\frac{1}{3}$.

b) $z = -1$ é o elemento de maior módulo, neste conjunto.

c) $z = -\frac{1}{3}$ é o elemento de maior argumento, neste conjunto.

d) não existe $z$, neste conjunto, que seja imaginário puro.

16) Os gráficos a seguir apresentam os números de candidatos e de vagas para os concursos da AFA 2012 e 2013.

Entenda-se por concorrência a razão entre o número de candidatos e número de vagas.
Do concurso de 2012 para o concurso de 2013, pode-se afirmar corretamente que

a) para a infantaria, a taxa de crescimento do número de candidatos foi positiva, porém a concorrência diminuiu.

b) para o quadro de intendência, tanto a procura quanto a concorrência diminuíram.

c) apesar da taxa de crescimento do número de candidatos ao quadro de aviadores ser negativa, a concorrência aumentou.

d) a concorrência dobrou.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2012/2013

1) Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$A = (\mathbb{N} \cup I) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$

$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$

$D = (\mathbb{N} \cup I) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos $A$, $B$ e $D$, nesta ordem, é

a) $-3$; $0,5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}$; $\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10}$; $-5$ e $2$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $3$ e $2,\overline{31}$

2) Considerando os números complexos $z_1$ e $z_2$, tais que:

- $z_1$ é a raiz cúbica de $8i$ que tem afixo no segundo quadrante
- $z_2$ é a raiz da equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e $\text{Im}(z_2) > 0$

Pode-se afirmar que $|z_1 + z_2|$ é igual a

a) $2\sqrt{3}$

b) $3 + \sqrt{3}$

c) $1 + 2\sqrt{2}$

d) $2 + 2\sqrt{2}$

3) A sequência $\left(x, 6, y, y + \frac{8}{3}\right)$ é tal que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética, e os três últimos formam uma progressão geométrica. Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é:

a) $\frac{92}{3}$

b) $\frac{89}{3}$

c) $\frac{86}{3}$

d) $\frac{83}{3}$

4) As raízes da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$ formam uma progressão geométrica. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ é igual a

a) $\frac{2}{3}$
b) $3$
c) $-\frac{3}{2}$
d) $-\frac{1}{3}$

5) Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados $10$ soldados, dentre eles o soldado $A$ e o soldado $B$, de tal maneira que fiquem $4$ soldados na barraca I, $3$ na barraca II e $3$ na barraca III. Se o soldado $A$ deve ficar na barraca I e o soldado B **NÃO** deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a
a) $560$
b) $1120$
c) $1680$
d) $2240$

6) Um dado cúbico tem três de suas faces numeradas com "0", duas com "1" e uma com "2". Um outro dado, tetraédrico, tem duas de suas faces numeradas com "0", uma com "1" e uma com "2". Sabe-se que os dados não são viciados.
Se ambos são lançados simultaneamente, a probabilidade de a soma do valor ocorrido na face superior do dado cúbico com o valor ocorrido na face voltada para baixo no tetraédrico ser igual a $3$ é de
a) $12,5\%$
b) $16,6\%$
c) $37,5\%$
d) $67,5\%$

7) Considere as matrizes $A$ e $B$, inversíveis e de ordem $n$, bem como a matriz identidade $I$. Sabendo que $\det(A)=5$ e $\det\left(I\cdot B^{-1}\cdot A\right)=\frac{1}{3}$, então o $\det\left[3\cdot\left(B^{-1}\cdot A^{-1}\right)^t\right]$ é igual a
a) $5\cdot 3^n$
b) $\frac{3^{n-1}}{5^2}$
c) $\frac{3^n}{15}$
d) $3^{n-1}$

8) Irão participar do EPEMM, Encontro Pedagógico do Ensino Médio Militar, um Congresso de Professores das Escolas Militares, $87$ professores das disciplinas de Matemática, Física e Química. Sabe-se que cada professor leciona apenas uma dessas três disciplinas e que o número de professores de Física é o triplo do número de professores de Química.
Pode-se afirmar que:
a) se o número de professores de Química for $16$, os professores de Matemática serão a metade dos de Física.
b) o menor número possível de professores de Química é igual a $3$.

c) o número de professores de Química será no máximo 21.
d) o número de professores de Química será maior do que o de Matemática, se o de Química for em quantidade maior ou igual a $17$.

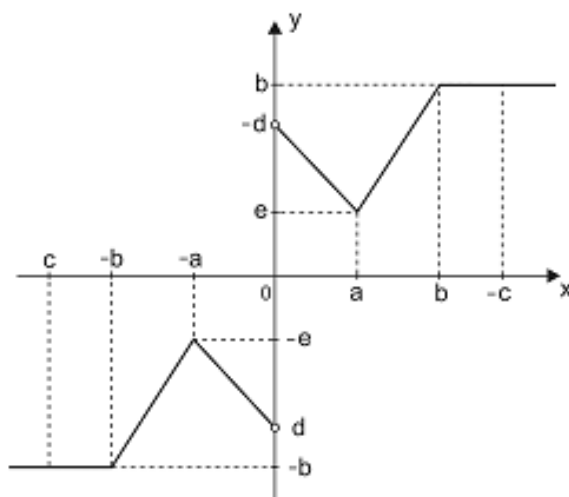
9) Sejam $a$ e $b$ dois números reais positivos. As retas $r$ e $s$ se interceptam no ponto $(a,b)$. Se $\left(\frac{a}{2},0\right)\in r$ e $\left(0,\frac{b}{2}\right)\in s$, então uma equação para a reta $t$, que passa por $(0,0)$ e tem a tangente do ângulo agudo formado entre $r$ e $s$ como coeficiente angular, é
a) $3abx+\left(2a^2-b^2\right)y=0$
b) $3bx-b\left(a^2+b^2\right)y=0$
c) $3ax-a\left(a^2+b^2\right)y=0$
d) $3abx-2\left(a^2+b^2\right)y=0$

10) Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse de equação $x^2+9y^2-8x-54y+88=0$ é correto afirmar que
a) tem raio igual a $1$.
b) tangencia o eixo das abscissas.
c) é secante ao eixo das ordenadas.
d) intercepta a reta de equação $4x-y=0$.

11) Dois corredores partem de um ponto ao mesmo tempo e se deslocam da seguinte forma: o primeiro é tal, que sua velocidade $y_1$ é dada em função da distância $x$ por ele percorrida através de

$$y_1=\begin{cases}4, \text{ se } x\le 200\\ \frac{n}{200}x-\frac{n^2+n-8}{2}, \text{ se } 200n<x\le 200(n+1)\end{cases}$$

em que $n$ varia no conjunto dos números naturais não nulos.
O segundo é tal que sua velocidade $y_2$ é dada em função da distância $x$ por ele percorrida através de $y_2=\frac{x}{100}+4$.
Tais velocidades são marcadas em $km/h$, e as distâncias, em metros.
Assim sendo, ambos estarão à mesma velocidade após terem percorrido
a) $800$ m
b) $900$ m
c) $1000$ m
d) $1100$ m

12) O gráfico abaixo descreve uma função $f:A\to B$

Analise as proposições que seguem.

I) $A = \mathbb{R}^*$

II) f é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$.

III) Para infinitos valores de $x \in A$, tem-se $f(x) = -b$.

IV) $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = 2b$

V) f é função par.

VI) $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -d$

São verdadeiras apenas as proposições

a) I, III e IV

b) I, II e VI

c) III, IV e V

d) I, II e IV

13) O gráfico de uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$, que tem como coordenadas do vértice $(5, 2)$ e passa pelo ponto $(4, 3)$, também passará pelo ponto de coordenadas

a) $(1, 18)$

b) $(0, 26)$

c) $(6, 4)$

d) $(-1, 36)$

14) No plano cartesiano, seja $P(a, b)$ o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais f e g definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. É correto afirmar que

a) $a = \log_2 \left( \dfrac{1}{\log_2 \left( \frac{1}{a} \right)} \right)$

b) $a = \log_2 (\log_2 a)$

c) $a=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$
d) $a=\log_{2}\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)$

15) Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x)=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y=f(x)$ é a altura da onda, em metros, e $x$ o tempo, em minutos.
Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.
a) A altura de uma onda nunca atinge $2$ metros.
b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se $2$ minutos.
c) De zero a $4$ minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
d) As alturas das ondas observadas com $30$, $90$, $150$, ... segundos são sempre iguais.

16) Sejam as funções reais $f$, $g$ e $h$ definidas por $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x}+\frac{\cos x}{\sec x}$, $g(x)=|\sec x|$ e $h(x)=|\operatorname{cossec} x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0,2\pi]$.
A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de $f$ e $g$; $f$ e $h$; $g$ e $h$ é(são), respectivamente
a) $0$, $0$ e $4$
b) $3$, $1$ e $4$
c) $2$, $3$ e $4$
d) $0$, $2$ e $3$

17) Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica. Dessa maneira, esse triângulo NÃO é:
a) acutângulo.
b) equilátero.
c) obtusângulo.
d) isósceles.

18) Uma pirâmide regular $ABCV$, de base triangular $ABC$, é tal que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede $3\text{ cm}$.
Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de $A$ à face $BCV$ é igual a
a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$
b) $\sqrt{7}$
c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$
d) $2\sqrt{2}$

19) Uma caixa cúbica, cuja aresta mede $0,4$ metros, está com água até $\frac{7}{8}$ de sua altura.

Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, **NÃO** provoca transbordamento de água é

a) uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}\ \text{dm}$.

b) pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam $30\ \text{cm}$.

c) um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}\ \text{dm}$ e a altura $3\ \text{dm}$.

d) um cilindro equilátero, cuja altura seja $20\ \text{cm}$.

20) As seis questões de uma prova eram tais, que as quatro primeiras valiam $1,5$ ponto cada, e as duas últimas valiam $2$ pontos cada.

Cada questão, ao ser corrigida, era considerada certa ou errada. No caso de certa era atribuída a ela o total de pontos que valia e, no caso de errada, a nota $0$ (zero).

Ao final da correção de todas as provas, foi divulgada a seguinte tabela:

| Nº DA QUESTÃO | PERCENTUAL DE ACERTOS |
|---|---|
| 1 | 40% |
| 2 | 50% |
| 3 | 10% |
| 4 | 70% |
| 5 | 5% |
| 6 | 60% |

A média aritmética das notas de todos os que realizaram tal prova é

a) $3,7$

b) $3,85$

c) $4$

d) $4,15$

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2011/2012

1) Três carros, $a$, $b$, $c$, com diferentes taxas de consumo de combustível, percorrerão, cada um, $600\text{ km}$ por um mesmo caminho. No ponto de partida, os três estão com tanque cheio.

Após terem percorrido, cada um, $\frac{1}{5}$ do total previsto, os carros $b$ e $c$ foram abastecidos completando novamente seus tanques e gastaram, juntos, $\text{R\$ } 66,00$.

Ao final dos $600\text{ km}$, os três carros foram abastecidos, completando seus tanques, e, nesse abastecimento, juntos, gastaram $\text{R\$ } 384,00$. Considerando o preço do litro do combustível usado pelos três carros a $\text{R\$ } 3,00$, a distância que o carro $\underline{a}$ percorre, em média, com um litro de combustível é

a) $12\text{ km}$.
b) $15\text{ km}$.
c) $16\text{ km}$.
d) $18\text{ km}$.

2) O valor de $n$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = 31+i$, sendo $i$ a unidade imaginária, é

a) par menor que $10$.
b) primo maior que $8$.
c) ímpar menor que $7$
d) múltiplo de $9$.

3) Sejam $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$ uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, respectivamente, ambas com a mesma soma dos termos e ambas crescentes. Se a razão $r$ da progressão aritmética é o dobro da razão $q$ da progressão geométrica, então, o produto $r \cdot q$ é igual a

a) 15
b) 18
c) 21
d) 24

4) O polinômio $P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x$ tem uma raiz dupla. Em relação à $P(x)$ é correto afirmar que

a) apenas uma de suas raízes é negativa.
b) a sua raiz dupla é negativa.
c) três de suas raízes são negativas.
d) nenhuma de suas raízes é negativa.

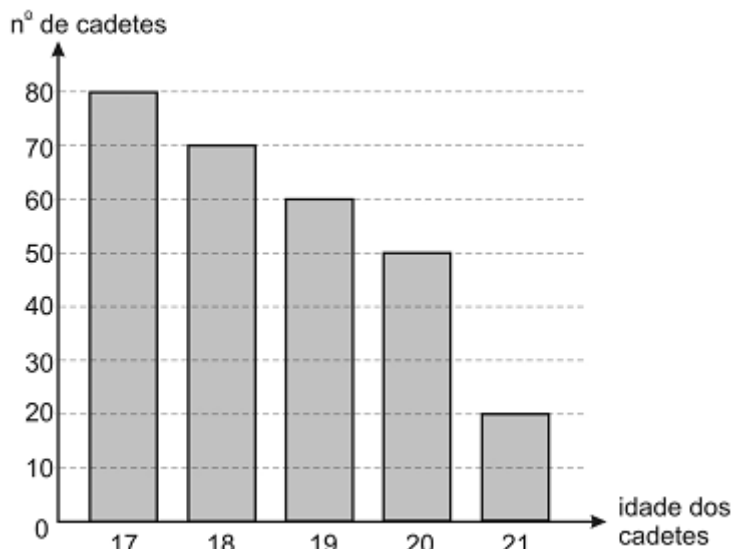
5) Para evitar que João acesse sites não recomendados na Internet, sua mãe quer colocar uma senha no computador formada apenas por $m$ letras A e também $m$ letras B (sendo $m$ par). Tal senha, quando lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, não deverá se alterar (Ex.: ABBA). Com essas características, o número máximo de senhas distintas que ela poderá criar para depois escolher uma é igual a:

a) $\frac{(2m)!}{m!m!}$

b) $\left[\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}\right]^2$

c) $\frac{(2m)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{3m}{2}\right)!}$

d) $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$

6) Suponha que a distribuição das idades dos cadetes do 1° ano da Academia da Força Aérea no ano de 2011 esteja representada pelo gráfico seguinte.

Com base nos dados registrados nesse gráfico, é correto afirmar que, escolhido um aluno ao acaso, a probabilidade de ele ter $20$ anos ou $21$ anos é igual a

a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 35%

7) Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

| MODELO | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| CILINDRADA (em litro) | 1.0 | 1.4 | 1.8 |

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo $a_{ij}$ representa a distância percorrida, em $km$, pelo modelo $i$, com um litro de combustível, à velocidade $10j$ $km/h$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7{,}6 & 7{,}2 & 8{,}9 & 8{,}2 & 11 & 10 & 12 & 11{,}8 \\ 5 & 7{,}5 & 7 & 8{,}5 & 8 & 10{,}5 & 9{,}5 & 11{,}5 & 11 \\ 3 & 2{,}7 & 5{,}9 & 5{,}5 & 8{,}1 & 7{,}4 & 9{,}8 & 9{,}4 & 13{,}1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que:
a) para motoristas que somente trafegam a $30\ \text{km/h}$, o carro $1.4$ é o mais econômico.
b) se durante um mesmo período de tempo um carro $1.4$ e um $1.8$ trafegam a $50\ \text{km/h}$, o $1.4$ será o mais econômico.
c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de $70\ \text{km/h}$, o carro $1.8$ é o de maior consumo.
d) para motoristas que somente trafegam a $80\ \text{km/h}$, o carro $1.0$ é o mais econômico.

8) Considere no plano cartesiano as retas $r:\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$ e $s:(k+1)x - y - \frac{k}{2} = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$. Sobre as retas $r$ e $s$ é correto afirmar que NUNCA serão
a) concorrentes perpendiculares.
b) concorrentes oblíquas.
c) paralelas distintas.
d) paralelas coincidentes.

9) No plano cartesiano, a circunferência $\lambda$ de equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, determina no eixo das ordenadas uma corda de comprimento $\ell = 8$. Dessa forma, é correto afirmar que
a) $\lambda$ é tangente ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.
b) o raio de $\lambda$ é igual a $\sqrt{k}$.
c) $P(k, -1) \in \lambda$.
d) $\lambda$ é secante à reta $x = k$.

10) Sejam as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} k \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
Em relação à equação matricial $AX = B$, é correto afirmar que
a) é impossível para $k = \frac{7}{2}$.
b) admite solução única para $k = \frac{7}{2}$.
c) toda solução satisfaz à condição $x_1 + x_2 = 4$.
d) admite a terna ordenada $\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ como solução.

11) Considere as proposições abaixo e as classifique em (V) verdadeira ou (F) falsa.
( ) Nas funções reais $g: C \to A$ e $f: A \to B$, se existe a função composta $(f \circ g): P \to S$, então $P = C$ e $S = B$.
( ) Se $h: \{m, n, p\} \to \{m, n, p\}$ é uma função tal que $h(m) = p$, $h(n) = m$ e $h(p) \neq n$, então $h$ é uma função injetora.

( ) Se $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ é uma função tal que $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\neq 1 \text{ e } x\neq 2 \\ x, & \text{se } x=2 \\ x-1, & \text{se } x=1 \end{cases}$, então $(f\circ f\circ f)^{-1}(x)=1$ se, e somente se, $x=0$.

A sequência correta é

a) F – F – V
b) V – V – F
c) F – V – F
d) V – V – V

12) Para angariar fundos de formatura, os cadetes do 1° ano da AFA vendem camisas de malha com o emblema da turma. Se o preço de venda de cada camisa é de $20$ reais, eles vendem por mês $30$ camisas.

Fizeram uma pesquisa e verificaram que, para cada $2$ reais de desconto no preço de cada camisa, são vendidas $6$ camisas a mais por mês.

Dessa forma, é correto afirmar que

a) é possível fazer mais de $10$ descontos de $2$ reais.
b) tanto faz vender as camisas por $12$ reais cada uma ou $18$ reais cada uma que o faturamento é o mesmo.
c) o máximo faturamento ocorre se são vendidas menos de $40$ camisas por mês.
d) se o preço de venda de cada camisa é de 14 reais, então o faturamento é maior que $680$ reais.

13) Considere a figura abaixo que representa um esboço do gráfico da função real $f$

Sabe-se que $g(x)=f(x)-3u$, $h(x)=g(x+u)$ e $j(x)=|h(x)|$.

Um esboço do gráfico que melhor representa a função $j$ é

b)

c)

d)

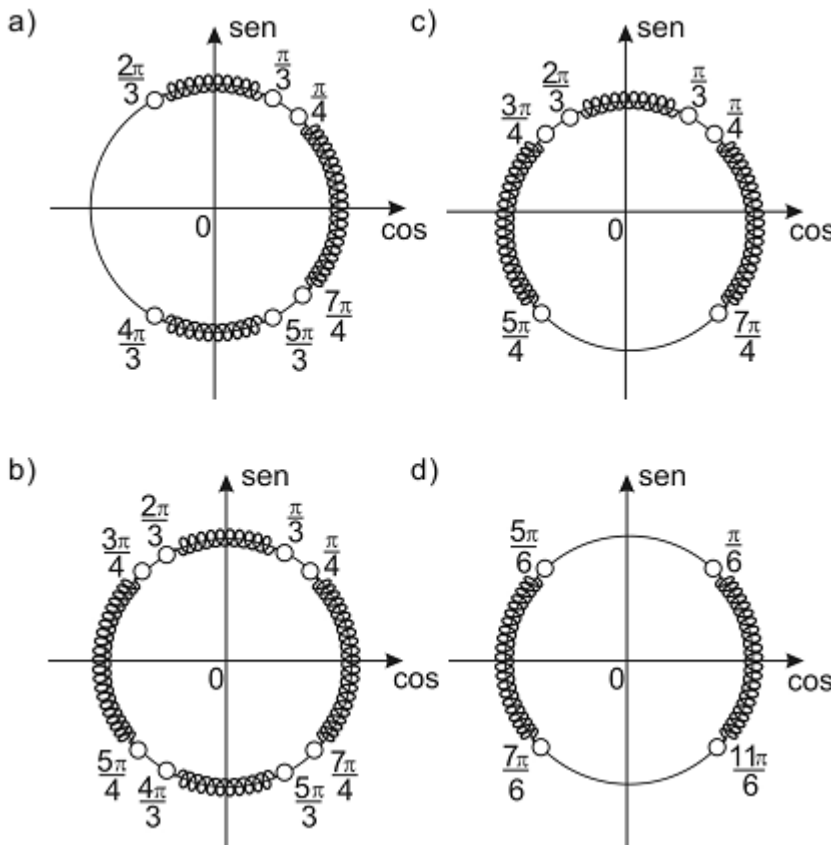
14) Considere $f$ uma função quadrática de raízes reais e opostas.
O gráfico de $f$ intercepta o gráfico da função real $g$ definida por $g(x) = -2$ em exatamente um ponto.
Se $f(\sqrt{3}) = 4$ e $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, então, é INCORRETO afirmar que
a) $f(x) - g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) o produto das raízes de $f$ é um número ímpar.
c) a função real $h$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$ admite valor máximo.
d) $f$ é crescente $\forall x \in [1, +\infty[$.

15) Considere uma aplicação financeira denominada UNI que rende juros mensais de $M = \log_{27} 196$ e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de $N = -\log_{\frac{1}{9}} 14$. A razão entre os juros mensais $M$ e $N$, nessa ordem, é
a) 70%
b) $\frac{2}{3}$

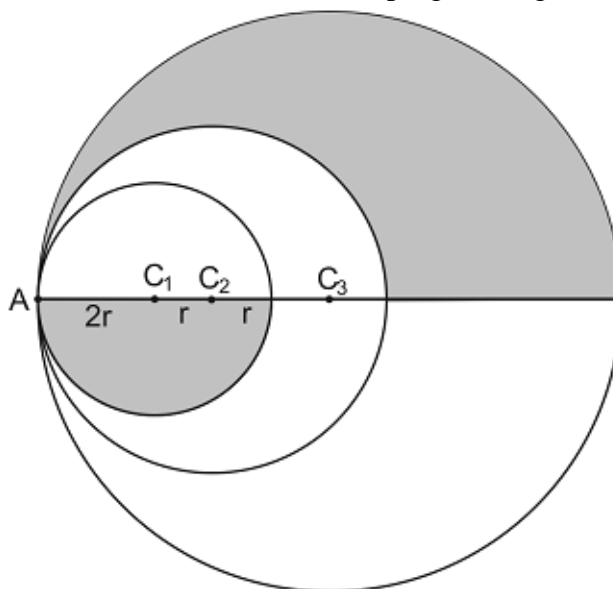
c) $\frac{4}{3}$
d) 80%

16) Considere a função real $g: A \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$. Sabendo-se que o conjunto $A$ é o mais amplo possível, é verdade que
a) $\exists x \in A$ tal que $g(x) = -1$
b) se $h(x) = -1 + |g(x)|$, então $h$ possui raiz real.
c) se $0 < x < 1$, então $-1 < g(x) < 0$
d) $\exists x \in ]-\infty, -2[$ tal que $g(x) > 3$

17) Sendo $x \in [0, 2\pi]$, a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação $-8\text{sen}^4 x + 10\text{sen}^2 x - 3 < 0$ é dada por

18) Considere $A$ o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\text{cossec}\, x} + \frac{\cos x}{\sec x}$. Sobre a função $f$ é correto afirmar que
a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
b) é periódica com período igual a $\pi$.

c) é decrescente se $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) é ímpar.

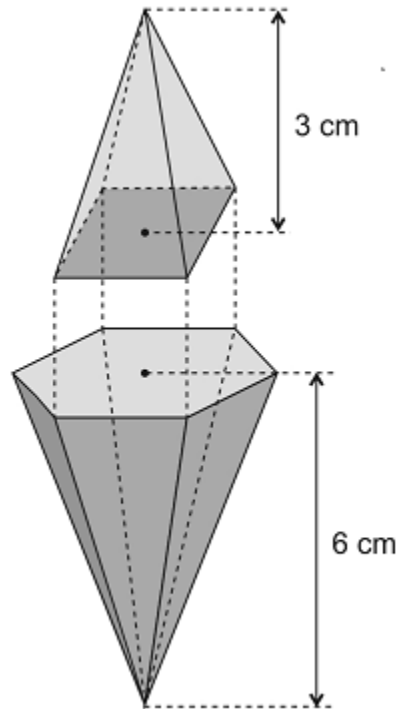
19) Conforme a figura abaixo, $A$ é o ponto de tangência das circunferências de centros $C_1$, $C_2$ e $C_3$. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.

Se os raios das circunferências de centros $C_1$ e $C_2$ medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

a) $\frac{55}{8}\pi r^2$

b) $\frac{29}{4}\pi r^2$

c) $\frac{61}{8}\pi r^2$

d) $8\pi r^2$

20) Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura $6\text{ cm}$ foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura $3\text{ cm}$, de forma que $4$ dos $6$ vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\text{ cm}$, então, o volume do sólido obtido, em $\text{cm}^3$, é igual a

a) $15\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $25\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2010/2011

1) Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ , então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) $\alpha$ pode ser escrito na forma $\alpha = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\alpha \in \left[(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\right]$

d) $\left[(\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})\right] \supset \alpha$

2) O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura abaixo.

É correto afirmar que o conjugado de $z^2$ tem afixo que pertence ao

a) 1º quadrante.

b) 2º quadrante.

c) 3º quadrante.

d) 4º quadrante.

3) De um dos lados de uma avenida retilínea, estão dispostos alguns postes nos ponto $P_1, P_2, \ldots, P_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Do outro lado dessa mesma avenida, estão dispostas algumas árvores nos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

- $\overline{P_1P_2} = 3\text{dam}$
- $\overline{P_1P_i} = 63\text{dam}$
- $\left(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética finita de razão 3.
- $\overline{A_1A_j} = \overline{P_1P_i}$
- $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots\right)$ é uma progressão geométrica finita de razão 2.
- $i = j$

Com base nessas informações, é correto afirmar que a maior distância entre duas árvores consecutivas é, em dam, igual a

a) 63

b) 32

c) 18

d) 16

4) Sobre o polinômio $A(x)$, expresso pelo determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$, é INCORRETO afirmar que

a) não possui raízes comuns com $B(x) = x^2 - 1$.
b) não possui raízes imaginárias.
c) a soma das raízes é igual a uma de suas raízes.
d) é divisível por $P(x) = x + 2$.

5) Um colecionador deixou sua casa provido de R$ 5,00, disposto a gastar tudo na loja de miniaturas da esquina. O vendedor lhe mostrou três opções que havia na loja, conforme a seguir.

- 5 diferentes miniaturas de carros, custando R$ 4,00 cada miniatura;
- 3 diferentes miniaturas de livros, custando R$ 1,00 cada miniatura;
- 2 diferentes miniaturas de bichos, custando R$ 3,00 cada miniatura.

O número de diferentes maneiras desse colecionador efetuar a compra das miniaturas, gastando todo o seu dinheiro, é
a) 15
b) 21
c) 42
d) 90

6) Sendo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 2 & c \end{vmatrix} = 70$, o valor de $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix}$ é

a) 280
b) 0
c) $-70$
d) $-210$

7) Considere que:
I) em uma urna encontram-se $p$ bolas vermelhas e $q$ bolas azuis;
II) duas bolas são retiradas dessa urna, sucessivamente e com reposição.
Sabe-se que $x$ é a variável que indica o número de bolas azuis observadas com as retiradas, cuja distribuição de probabilidade está de acordo coma tabela a seguir.

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0,36 | 0,48 | 0,16 |

Nessas condições, é correto afirmar que
a) a probabilidade de se observar no máximo uma bola azul é $64\%$.
b) se $p = 6$, então $q = 2$.
c) se $p = 18$, então $q = 12$.
d) $p + q$ é necessariamente menor ou igual a $100$.

8) Um quadrado de $9\text{ cm}^2$ de área tem vértices consecutivos sobre a bissetriz dos quadrantes pares do plano cartesiano. Se os demais vértices estão sobre a reta $r$, que não possui pontos do $3^\circ$ quadrante, é **INCORRETO** afirmar que a reta r

a) pode ser escrita na forma segmentária.

b) possui o ponto $P\left(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

c) tem coeficiente linear igual a $3\sqrt{2}$.

d) é perpendicular à reta de equação $2x - 2y = 0$.

9) Três amigos Samuel, Vitória e Júlia, foram a uma lanchonete

• Samuel tomou 1 guaraná, comeu 2 esfirras e pagou 5 reais.
• Vitória tomou 2 guaranás, comeu 1 esfirra e pagou 4 reais.
• Júlia tomou 2 guaranás, comeu 2 esfirras e pagou **k** reais.

Considerando-se que cada um dos três grupos pagou o valor exato que consumiu, é correto afirmar que:

a) o guaraná custou o dobro da esfirra.

b) os três amigos, juntos, consumiram 16 reais.

c) cada esfirra custou 2 reais.

d) Júlia pagou 8 reais pelo que consumiu.

10) Considere as funções reais $f$ e $g$ tal que $f(x) = x + 1$ e que existe a composta de $g$ com $f$ dada por $(gof)(x) = \sqrt{(x+1)^2}$. Sobre a função g, é INCORRETO afirmar que ela é

a) par.

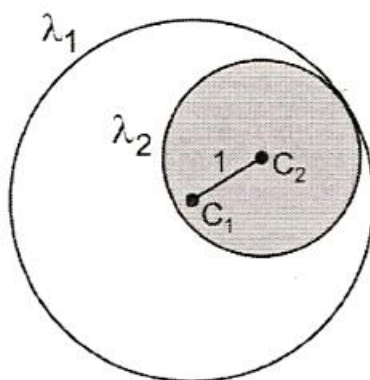
b) sobrejetora.

c) tal que $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) crescente se $x \in [1, +\infty[$.

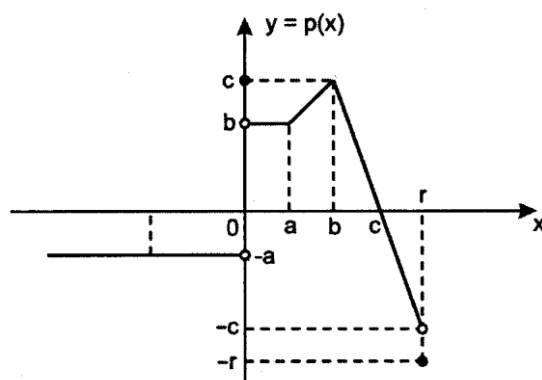
11) As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ da figura abaixo interiores e a distância entre os centros $C_1$ e $C_2$ é igual a 11 cm

Se a área sombreada é igual à área não sombreada na figura, é correto afirmar que o raio de $\lambda_2$, em cm, é um número do intervalo

a) $\left]2, \frac{11}{5}\right[$

b) $\left]\frac{11}{5},\frac{23}{10}\right[$

c) $\left]\frac{23}{10},\frac{5}{2}\right[$

d) $\left]\frac{5}{2},\frac{13}{5}\right[$

12) Considere o gráfico da função real $p: A \to B$

Analise as alternativas abaixo e, a seguir, marque a **FALSA**.

a) $p(x) \le 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } c \le x \le r\}$.

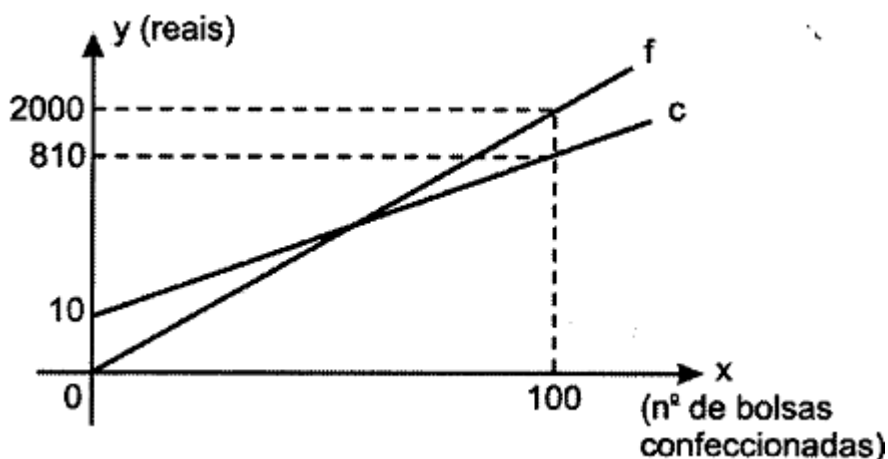
b) $p(p(p(p(p(r))))) = p(p(p(p(r))))$.

c) Existe um único $x \in A$ tal que $p(x) = c$.

d) $\text{Im}(p) = \{-r\} \cup ]-c, c]$.

13) Considere o conjunto $A = \{0,1,2,3\}$ e a função $f: A \to A$ tal que $f(3) = 1$ e $f(x) = x+1$, se $x \neq 3$
.
A soma dos valores de $x$ para os quais $(f \circ f \circ f)(x) = 3$ é
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

14) Considere a função quadrática $f: A \to B$ de raízes $x_1 = 1$ ou $x_2 = 3$, cujas coordenadas do vértice são iguais. Se $f(x) \ge 0$, $\forall x \in A$ e $[p,q]$ é o maior intervalo para o qual $f$ é uma função crescente, então $(q-p)$ é igual a
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

15) Luiza possui uma pequena confecção artesanal de bolsas. No gráfico abaixo, a reta **c** representa o custo total mensal com a confecção de **x** bolsas e a reta **f** representa o faturamento mensal de Luiza com a confecção de **x** bolsas.

Com base nos dados acima, é correto afirmar que a Luiza obtém lucro se, e somente se, vender
a) no mínimo 2 bolsas
b) pelo menos 1 bolsa
c) exatamente 3 bolsas
d) no mínimo 4 bolsas

16) Um médico, apreciador de logaritmos, prescreveu um medicamento a um de seus pacientes, também apreciador de logaritmo, conforme a seguir.

Tomar x gotas do medicamento α de 8 em 8 horas. A quantidade de gotas y diária deverá ser calculada pela fórmula $\log_8 y = \log_2 6$.

Considerando $\log 2 = \frac{3}{10}$ e $\log 3 = 0,48$, é correto afirmar que $\log_2 x$ é um número do intervalo
a) [3,4[
b) [4.5[
c) [5,6[
d) [6,7[

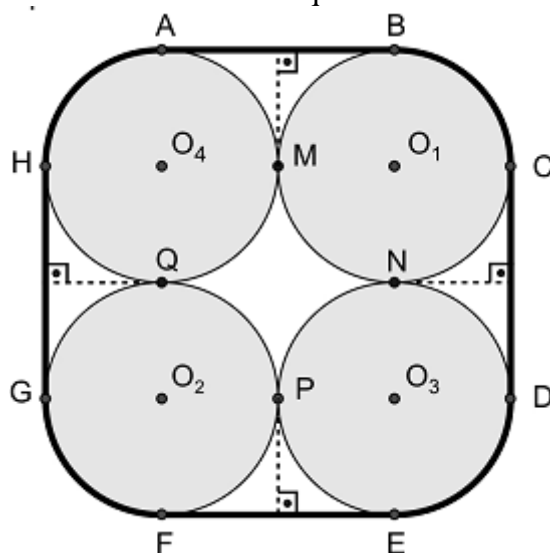
17) Classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo, onde $a \in \mathbb{R}$.
I) $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \quad \forall x \in \mathbb{R}$
II) se $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ e $a > 0$, então $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > a\}$
III) se $a > 0$ e $|x| < a$, então $x^2 - a^2 < 0$.
Tem-se a sequência correta em
a) F – V – F
b) F – F – V
c) V – F – V
d) F – V – V

18) O período da função real **f** definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a
a) $2\pi$

b) $\pi$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

19) Na figura abaixo têm-se quatro círculos, congruentes de centros $O_1$, $O_2$, $O_3$ e $O_4$ e de raio igual a $10\text{ cm}$. Os pontos M, N, P e Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G e H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna.

Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a

a) $2(\pi+40)$

b) $5(\pi+16)$

c) $20(\pi+4)$

d) $5(\pi+8)$

20) Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade.

Sabe-se que cada mercado receberá 2 barris de vinho, com altura igual a $\frac{1}{5}$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade **x** de mercados que receberão os barris (com capacidade máxima ocupada) é tal que **x** pertence ao intervalo

a) $0 < x < 20$

b) $20 \le x < 40$

c) $40 \le x < 60$

d) $60 \le x < 80$

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2009/2010

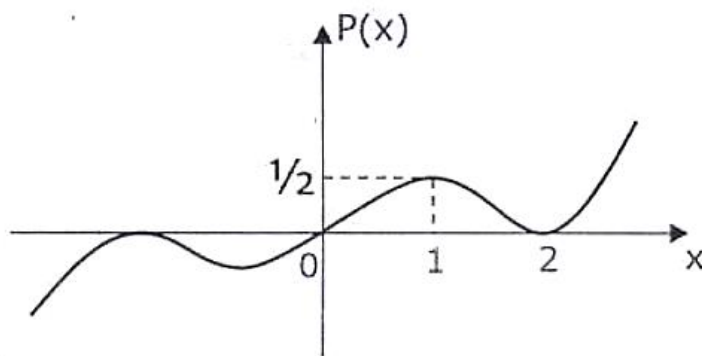
1) Uma pequena fábrica de cintos paga a seus funcionários o salário, conforme tabela abaixo:

| CARGO | SALÁRIOS (em reais) | Nº DE FUNCIONÁRIOS |
|---|---|---|
| COSTUREIRO(A) | 1000 | 10 |
| SECRETÁRIO(A) | 1500 | 4 |
| CONSULTOR | 2000 | 3 |
| GERENTE | x | 1 |

Certo mês, houve um aumento de 10% sobre os salários da tabela acima para todos os cargos. Sabendo-se que a nova média salarial passou a ser de 1650 reais, o novo salário do gerente é, em reais, igual a:
a) 5500
b) 5000
c) 3300
d) 3000

2) Sejam $z = x + yi$ ($x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}^*$ e $i$ a unidade imaginária), $\bar{z}$ o conjugado de $z$ e $\lambda$ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano para os quais $z \cdot \bar{z} = 2x + 3$. Se $A$ e $B$ são os pontos de interseção de $\lambda$ com o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e se $A'$ é o ponto de interseção de $\lambda$ com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ que possui a menor abscissa, então a área do triângulo $A'AB$ é, em unidades de área, igual a
a) $2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2}$

3) Sejam as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = 2^{-x}$. Considere os números A e B, tais que $A = f(1) + f(2) + ... + f(50)$ e $B = 1 + g(1) + g(2) + ... + g(n) + ...$. Se o produto de A por B tende para o número $\alpha$, então, $\alpha$ é:
a) ímpar múltiplo de 9.
b) par divisor de 10000.
c) par múltiplo de 15.
d) ímpar múltiplo de 25.

4) Observe a função polinomial $P$ esboçada no gráfico abaixo.

Sabe-se que $x = 0$ ou $x = 2$ são raízes de $P$ e que o resto da divisão de $P(x)$ por $[(x-2)\cdot(x-1)\cdot x]$ é $R(x)$. As raízes de $R(x)$ são números

a) inteiros pares.
b) inteiros ímpares.
c) fracionários opostos.
d) irracionais opostos.

5) Numa sala de aula, estão presentes $5$ alunos e $6$ alunas. Para uma determinada atividade, o professor deverá escolher um grupo de $3$ dessas alunas e $3$ dos alunos. Em seguida, os escolhidos serão dispostos em círculo de tal forma que alunos do mesmo sexo não fiquem lado a lado. Isso poderá ocorrer de **n** maneiras distintas. O número **n** é igual a:

a) 24000
b) 2400
c) 400
d) 200

6) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem o dobro da probabilidade de vencer que o estudante C Admitindo-se que não haja empate na competição, é FALSO afirmar que a probabilidade de

a) A ou B vencer é igual a 0,8.
b) A vencer é igual a 0,4.
c) C vencer é maior que 0,2.
d) B ou C vencer é igual a 0,6.

7) Seja o sistema S de equações nas incógnitas x, y e z e parâmetro real m

$$S = \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$$

Analise as proposições a seguir e assinale a **INCORRETA.**

a) Se $m = -3$, então **S** é impossível.
b) **S** é determinado se, e somente se, $m \neq 0$.
c) Se **S** é homogêneo, então $x + y + z$ não é sempre um número múltiplo de 3.
d) **S** admite solução para todo $m \neq -3$.

8) Para a fabricação de três modelos de avião, a Embraer precisa de alguns equipamentos, conforme a tabela abaixo

| Modelos / Equipamentos | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **Poltronas** | 20 | 30 | 60 |
| **Extintores** | 6 | 10 | 15 |

Para o ano de 2009, a Embraer recebeu encomendas dos três modelos, conforme a tabela abaixo

| Modelo / Ano de 2009 | Primeiro Semestre | Segundo Semestre |
|---|---|---|
| A | **20** | 50% a mais que no 1º semestre |
| B | **y** | 25 |
| C | 10 | 20% a menos que no 1º semestre |

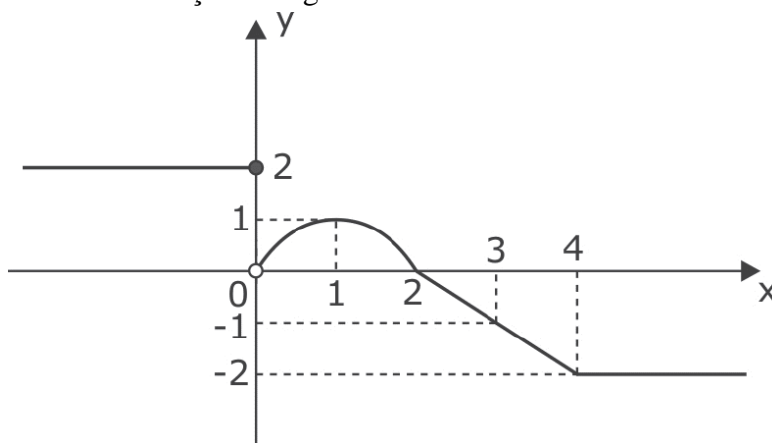
Sabendo-se que a quantidade necessária de poltronas para a fabricação dos três modelos de aviões no ano de 2009 é 3280, então a soma dos algarismos de y é igual a
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

9) Pedro e Maria com seus filhos Gabriel e João foram a uma clínica médica para uma revisão de saúde. Fazia parte da avaliação aferir o peso de cada um. A balança da clínica era muito antiga e tinha um defeito, só indicava pesos maiores que 60 kg
Para resolver a pesagem, procedeu-se da seguinte maneira:
Pesou-se
•Pedro, Maria e Gabriel, totalizando 150 kg.
•Pedro, Gabriel e João, totalizando 117 kg.
•Maria, Gabriel e João, totalizando 97 kg.
•Pedro, Maria, Gabriel e João, totalizando 172 kg.
Com base nessas informações, é correto afirmar que:
a) com essa balança é possível pesar Gabriel e João juntos.
b) a diferença entre os pesos de Pedro e Maria é o peso de João.
c) Pedro é mais pesado que Maria e João juntos.
d) não é possível pesar Maria sozinha nessa balança.

10) Considere as circunferências dadas pela equação $x^2 + y^2 = \frac{1}{b^2}$ $(b > 0)$. A circunferência que circunscreve um quadrado de área igual a 1250 é tal que b pertence ao intervalo
a) $\left]0, \frac{1}{30}\right[$
b) $\left]\frac{1}{30}, \frac{1}{28}\right[$

c) $\left]\frac{1}{28},\frac{1}{26}\right[$

d) $\left]\frac{1}{26},\frac{1}{24}\right[$

11) Analise o gráfico abaixo da função real $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Se $h$ é uma função real tal que $h(x)=g(x)+2$, então, marque alternativa verdadeira.

a) $(h\circ h\circ h\ldots\circ h)(0)=4$

b) $(h\circ h\circ h)(3)>(h\circ h\circ h\circ h)(2)$

c) Se $y=h\left(h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$ então $y\in\left]2,3\right[$

d) Se $x=h\left(h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)$ então $x\in\left]1,2\right[$

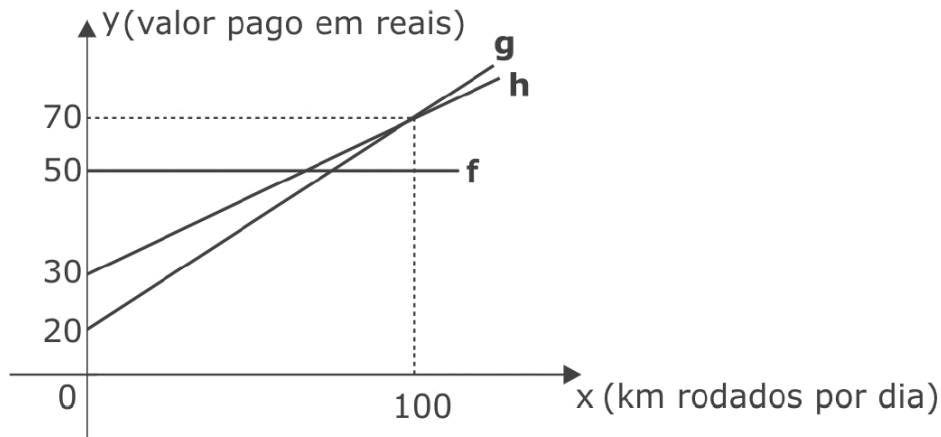
12) Considere a reta $r$ simétrica da reta $(s)\ 2x+y-2=0$ em relação a reta $(t)\ x-3y-2=0$. Com base nisso, marque a alternativa verdadeira.

a) Se $-\frac{10}{3}<y<0$ então $r\cap t=\varnothing$.

b) $\exists P(x,y)\in r$ tal que $x<0$ e $y<0$.

c) Na reta $r$, se $x>\frac{8}{7}$ então $y<-\frac{2}{7}$.

d) $\nexists\ P(x,y)\in r$ tal que $x>0$ e $y<-\frac{10}{3}$.

13) Na figura abaixo, tem-se representado as funções f, g e h que indicam os valores pagos, respectivamente, às locadoras de automóveis $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ para x quilômetros rodados por dia. Uma pessoa pretende alugar um carro e analisa as três opções.

Após a análise, essa pessoa conclui que optar pela locadora $\alpha$ ao invés das outras duas locadoras, é mais vantajoso quando $x \in ]\, m, +\infty\, [$, $m \in \mathbb{R}$. O menor valor possível para m é

a) 60
b) 70
c) 80
d) 90

14) Sobre a função real $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \log_2(x^2)$, é **INCORRETO** afirmar que é

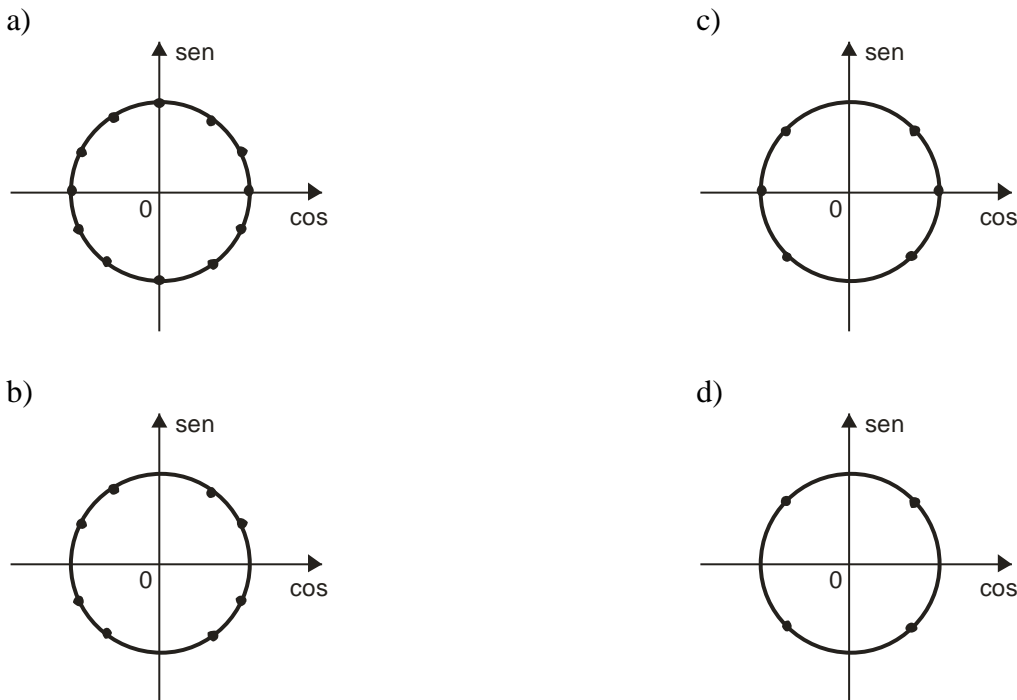
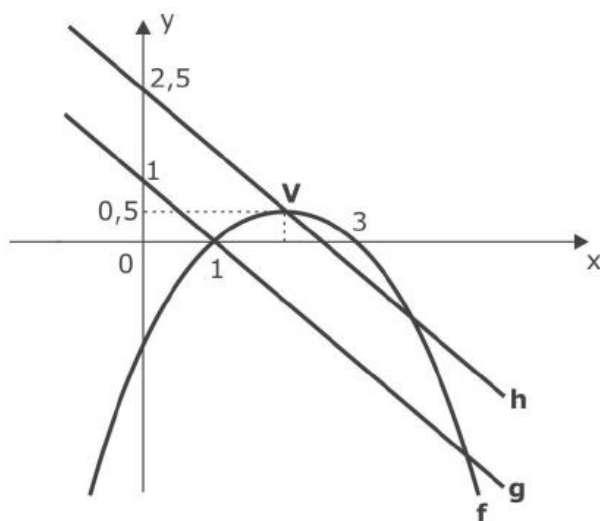
a) par.
b) sobrejetora.
c) crescente se $x \in [1, +\infty[$.
d) injetora.

15) Seja a função real f definida por $f(x) = \cos(4x) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$. Marque a alternativa que possui a melhor representação, no ciclo trigonométrico, de todas as raízes da função f.

a)

c)

b)

d)

16) Considere o esboço dos gráficos das funções reais f, g e h, tais que f é do 2° grau e g e h são do 1° grau.
Sabe-se que V é o vértice da parábola.

O conjunto de todos os valores de x para os quais $h(x) > g(x) > f(x)$ é

a) $\mathbb{R} - ]1,5[$

b) $\mathbb{R} - [1,5]$

c) $\mathbb{R} - [1,3]$

d) $\mathbb{R} - ]1,3[$

17) Sejam as funções reais dadas por $f(x) = 2^{2x+1}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. Se $b \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2g(b)$ e $p = \log_3 b$, então sobre **p** é correto afirmar que

a) não está definido.
b) é positivo e menor que 1.
c) é negativo e menor que 1.
d) é positivo e maior que 1.

18) Sobre a função real f definida por $f(x) = -1 - |6(\text{sen}x)(\cos x)|$, é **INCORRETO** afirmar que:

a) $\text{Im}(f) = [-1, 2]$.

b) é decrescente para todo $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) possui 8 raízes no intervalo $[0, 2\pi]$.

d) tem período igual ao período da função real g dada por $g(x) = 2f(x)$.

19) A Revista Época publicou uma reportagem em fevereiro de 2009 a respeito do impacto da crise financeira mundial no crescimento da economia.

**Desaceleração recorde**
Em 2009, a economia mundial deverá ter o menor crescimento desde a 2ª Guerra Mundial – em % ao ano.
O gráfico abaixo indica o percentual de crescimento da economia mundial de alguns anos, no período de 1980 a 2009.

Fonte: Revista Época – 02/02/2009/n.º 559 – pág. 85 (Adaptado)

Sabendo-se que no ano de 2009 o percentual foi estimado, analise o gráfico e marque a alternativa **FALSA**.
a) Houve um aumento superior a 42% do percentual de crescimento do ano de 1995 para o ano 2000.
b) A queda de crescimento do ano de 2005 para o percentual estimado no ano de 2009 é menor que 90%.
c) O aumento do percentual de crescimento do ano de 1985 em relação ao ano de 1980 é aproximadamente 95%
d) A taxa de crescimento do ano de 2000 em relação ao ano de 1985 é a mesma que a taxa de crescimento do ano de 1990 em relação ao ano de 1980.

20) Considere uma chapa de aço circular de espessura desprezível e raio 15 cm. Recortando-se, dessa chapa, dois setores circulares de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad cada, e juntando-se em cada um desses setores os lados de mesma medida, sem perda de material, obtém-se dois objetos em forma de cone.
Unindo-se as bases desses cones, obtém-se um objeto **A.**
Dentro de um cilindro suficientemente grande e repleto de água até a borda foram inseridas esferas de ferro cuja área da superfície de cada uma é $9\pi\ \text{cm}^2$. A cada esfera inserida a água que transbordava era recolhida e armazenada dentro do objeto A
Foram inseridas esferas dentro do cilindro até que o líquido que estava sendo armazenado no objeto A transbordasse. Quantas esferas foram inseridas?
Dado: $\sqrt{2}=1,41$
a) 50
b) 51

c) 52
d) 53

# CAPÍTULO 2
# RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

**PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2015/2016**

1) b (Função quadrática)
2) c (Números complexos)
3) b (Progressões)
4) b (Polinômios)
5) a (Análise combinatória)
6) d (Probabilidade)
7) d (Matrizes e determinantes)
8) b (Geometria analítica – circunferência)
9) d (Geometria analítica – cônicas)
10) c (Função)
11) d (Função do 1º grau)
12) a (Função composta)
13) a (Exponencial e logaritmo)
14) c (Funções trigonométricas)
15) c (Geometria analítica – reta e Geometria Espacial)
16) a (Estatística – desvio padrão)

**PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2014/2015**

1) d (Geometria Analítica – circunferência)
2) c (Geometria Plana – áreas e progressão aritmética)
3) c (Funções)
4) d (Polinômios)
5) b (Geometria Espacial)
6) d (Números complexos – lugar geométrico)
7) c (Sistemas lineares)
8) b (Logaritmo, números complexos e trigonometria – redução ao primeiro quadrante)
9) c (Determinantes, função e trigonometria)
10) a (Análise Combinatória)
11) d (Matrizes e determinantes)
12) c (Probabilidade)
13) b (Função exponencial)
14) a (Função – gráfico e composição)
15) a (Geometria Analítica – reta e circunferência)
16) a (Análise de gráficos)

**PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2013/2014**

1) a (Equações polinomiais)
2) c (Probabilidade)
3) b (Função)
4) a (Funções trigonométricas)
5) d (Progressão geométrica)
6) b (Geometria analítica – circunferência)
7) d (Geometria plana – áreas)
8) d (Análise combinatória)
9) b (Razões e proporções)
10) b (Geometria espacial – pirâmides)
11) a (Trigonometria)
12) b (Sistemas lineares)
13) d (Função quadrática e afim)
14) b (Logaritmo)
15) c (Números complexos)
16) c (Estatística – gráficos)

**PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2012/2013**

1) d (Conjuntos numéricos)
2) a (Números complexos)
3) c (Progressões)
4) d (Equações polinomiais)
5) b (Análise combinatória)
6) a (Probabilidade)
7) b (Determinantes)
8) c (Sistema linear)
9) d (Geometria Analítica – reta)
10) b (Geometria Analítica – elipse)
11) c (Função)
12) a (Função)
13) a (Função quadrática)
14) a (Logaritmos)
15) c (Funções trigonométricas)
16) a (Funções trigonométricas)
17) c (Geometria Plana – relações métricas nos triângulos / Progressões)
18) a (Geometria Espacial – pirâmides)
19) d (Geometria Espacial – volumes)
20) b (Estatística – médias)

## PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2011/2012

1) b (Razões e proporções)
2) d (Progressões)
3) b (Progressões)
4) a (Equação polinomial)
5) d (Análise combinatória)
6) b (Probabilidade)
7) d (Matrizes)
8) d (Geometria analítica – reta)
9) a (Geometria analítica – circunferência)
10) c (Sistemas lineares)
11) a (Função)
12) b (Função quadrática)
13) a (Função – gráfico)
14) a (Função quadrática)
15) c (Logaritmo)
16) c (Função)
17) b (Inequação trigonométrica)
18) a (Função trigonométrica)
19) c (Geometria plana – áreas)
20) b (Geometria espacial – volume)

## PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2010/2011

1) b (Conjuntos numéricos)
2) c (Números complexos)
3) b (Progressões)
4) a (Determinantes e polinômios)
5) b (Análise combinatória)
6) d (Determinantes)
7) c (Probabilidade)
8) b (Geometria analítica – reta)
9) c ( Sistemas lineares)
10) b (Função)
11) c (Geometria plana – áreas)
12) c (Função)
13) b (Função)
14) a (Função quadrática)
15) b (Função do 1º grau)
16) d (Logaritmo)
17) d (Desigualdades)
18) d (Função trigonométrica)
19) c (Geometria plana – comprimento da circunferência)
20) c (Geometria espacial – volume)

## PROVA DE MATEMÁTICA – AFA 2009/2010

1) a (Médias)
2) c (Números complexos)
3) d (Progressões)
4) a (Polinômios)
5) b (Análise combinatória)
6) c (Probabilidade)
7) b (Sistema linear)
8) b (Sistema linear)
9) d (Sistema linear)
10) d (Geometria analítica – circunferência)
11) c (Função composta)
12) c (Geometria analítica – reta)
13) a (Função do 1º grau)
14) d (Logaritmo)
15) a (Função trigonométrica)
16) b (Função quadrática)
17) a (Logaritmo)
18) b (Função trigonométrica)
19) d (Análise de gráficos)
20) d (Geometria espacial – volume)

## QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 2010 A 2016

| | 2016 | 2015 | 2014 | 2013 | 2012 | 2011 | 2010 | TOTAL | PERCENTUAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Conjuntos numéricos | | | | 1 | 1 | 1 | | 3 | 2,3% |
| Desigualdades | | | | | | 1 | | 1 | 0,8% |
| Razões e proporções | | | 1 | | | | | 1 | 0,8% |
| Progressões | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 7 | 5,5% |
| Trigonometria | | 1 | 1 | | 1 | | | 3 | 2,3% |
| Função trigonométrica | 1 | | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 8 | 6,3% |
| Números complexos | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 6 | 4,7% |
| Polinômios | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 6 | 4,7% |
| Função | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 14 | 10,9% |
| Função do 1º grau | 1 | | | | | 1 | 1 | 3 | 2,3% |
| Função quadrática | 1 | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 7 | 5,5% |
| Função exponencial | 1 | 1 | | | | | | 2 | 1,6% |
| Logaritmo | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 7 | 5,5% |
| Matrizes e determinantes | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | 6 | 4,7% |
| Sistemas lineares | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 8 | 6,3% |
| Análise combinatória | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 5,5% |
| Probabilidade | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 5,5% |
| Estatística - médias e desvio padrão | 1 | | | 1 | | | 1 | 3 | 2,3% |
| Estatística - análise de gráficos | | 1 | 1 | | | | 1 | 3 | 2,3% |
| Geometria plana - triângulos | | | | 1 | | | | 1 | 0,8% |
| Geometria plana - circunferência | | | | | | 1 | | 1 | 0,8% |
| Geometria plana - áreas | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 4 | 3,1% |
| Geometria analítica - reta | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 3,9% |
| Geometria analítica - circunferência | 1 | 2 | 1 | | 1 | | 1 | 6 | 4,7% |
| Geometria analítica - cônicas | 1 | | | 1 | | | | 2 | 1,6% |
| Geometria espacial - pirâmides | | | 1 | 1 | | | | 2 | 1,6% |
| Geometria espacial - volume | | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 3,9% |
| **TOTAL POR PROVA** | **16** | **16** | **16** | **20** | **20** | **20** | **20** | **128** | **100%** |

# CAPÍTULO 3
# ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2015/2016

1) Uma fábrica produz casacos de determinado modelo. O preço de venda de um desses casacos é de R$ 200,00, quando são vendidos 200 casacos. O gerente da fábrica, a partir de uma pesquisa, verificou que, para cada desconto de R$ 2,00 no preço de cada casaco, o número de casacos vendidos aumenta de 5. A maior arrecadação possível com a venda de casacos acontecerá se a fábrica vender cada casaco por um valor, em reais, pertencente ao intervalo
a) $[105,125[$
b) $[125,145[$
c) $[145,165[$
d) $[165,185[$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Se forem dados n descontos de R$ 2,00, então o preço de cada casaco será $(200-2n)$ e a quantidade de casacos vendidos, $(200+5n)$. Portanto, a receita com as vendas é dada por
$R(n)=(200-2n)\cdot(200+5n)=-10n^2+600n+40000$.
Observando que a receita de vendas é uma função quadrática do número n de descontos e que o coeficiente líder é negativo, então essa função possui um ponto de máximo, que ocorre quando $n=\frac{-600}{2\cdot(-10)}=30$.
Sendo assim, o preço a que deve ser vendido cada casaco é $200-2n=200-2\cdot 30=140$ reais, que pertence ao intervalo $[125,145[$.
Note que foi utilizada a fórmula para a obtenção da abscissa do vértice da função quadrática. No caso de uma função da forma $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, a abscissa do vértice é dada por $x_V=\frac{-b}{2a}$ e a ordenada do vértice por $y_V=\frac{-\Delta}{4a}$, onde $\Delta=b^2-4ac$ (discriminante). Observe também que quando a é positivo, o vértice é um ponto de mínimo e, quando a é negativo, o vértice é um ponto de máximo.

2) Considere no Plano de Argand-Gauss os números complexos $z=x+yi$, onde $i=\sqrt{-1}$ e cujos afixos são os pontos $P(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Dada a equação $(z-1+i)^4=1$, sobre os elementos que compõem seu conjunto solução, é INCORRETO afirmar que
a) apenas um deles é imaginário puro.
b) todos podem ser escritos na forma trigonométrica.
c) o conjugado do que possui maior argumento é $1+2i$.
d) nem todos são números imaginários.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$(z-1+i)^4 = 1 = 1\text{cis}\,0 \Leftrightarrow z-1+i = \sqrt[4]{1}\cdot \text{cis}\,\frac{2k\pi}{4},\ k = 0,1,2,3$

$k=0:\ z_0 = 1-i+\text{cis}\,0 = 1-i+1 = 2-i = \sqrt{5}\text{cis}\left(2\pi + \text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$k=1: z_1 = 1-i+\text{cis}\,\frac{2\pi}{4} = 1-i+i = 1 = 1\text{cis}0$

$k=2: z_2 = 1-i+\text{cis}\,\frac{4\pi}{4} = 1-i-1 = -i = 1\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$

$k=3: z_3 = 1-i+\text{cis}\,\frac{6\pi}{4} = 1-i-i = 1-2i = \sqrt{5}\text{cis}\left(2\pi+\text{arctg}(-2)\right)$

$S = \{2-i, 1, -i, 1-2i\}$

a) CORRETA: apenas $-i$ é imaginário puro.
b) CORRETA: as representações dos quatro números complexos na forma trigonométrica encontram-se acima.
c) INCORRETA: o número complexo de maior argumento é $2-i$ e seu conjugado é $2+i$.
d) CORRETA: 1 não é um número imaginário.

3) Considere as expressões $A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \ldots + 5^2 - 3^2$ e $B = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}\cdot\ldots$. O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

a) 117 e 120
b) 114 e 117
c) 111 e 114
d) 108 e 111

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \ldots + 5^2 - 3^2 =$

$= (26+24)(26-24) + (23+21)\cdot(23-21) + (20+18)(20-18) + \ldots + (5+3)(5-3) =$

$= 50\cdot 2 + 44\cdot 2 + 38\cdot 2 + \ldots + 8\cdot 2 = 2\cdot(50+44+38+\ldots+8)$

A expressão acima apresenta a soma de uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 50$, último termo $a_n = 8$ e razão $r = -6$. Aplicando a fórmula do termo geral da P.A., temos:

$a_n = a_1 + r\cdot(n-1) \Leftrightarrow 8 = 50 + (-6)\cdot(n-1) \Leftrightarrow 6(n-1) = 42 \Leftrightarrow n = 8$

Aplicando a fórmula da soma dos termos da P.A., temos: $S_8 = \frac{(a_1+a_8)\cdot n}{2} = \frac{(50+8)\cdot 8}{2} = 232$.

Logo, $A = 2\cdot 232 = 464$.

$B = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}\cdot\ldots = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{16}}\cdot\ldots = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}$

O expoente de 2 é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Aplicando a fórmula da soma dos termos da P.G. infinita com razão de módulo menor do que 1, temos: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Logo, $B = 2^2 = 4$.

Portanto, $\frac{A}{B} = \frac{464}{4} = 116$ que é um número compreendido entre 114 e 117.

4) Considere os polinômios $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $P(x) = x^3 - 3x^2 - ax + b$, sendo a e b números reais tais que $a^2 - b^2 = -8$. Se os gráficos de $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então é INCORRETO afirmar sobre as raízes de $P(x)$ que

a) podem formar uma progressão aritmética.
b) são todas números naturais.
c) duas são os números a e b.
d) duas são números simétricos.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Se os gráficos de $Q(x)$ e $P(x)$ têm um ponto comum que pertence ao eixo das abscissas, então esses dois polinômios possuem uma raiz em comum.

O polinômio $Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ possui raiz dupla 1. Portanto, 1 deve ser raiz de $P(x)$.

Assim, temos: $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - a \cdot 1 + b = 0 \Leftrightarrow b - a = 2$.

Mas é dado que $a^2 - b^2 = -8 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = -8 \Rightarrow (a+b) \cdot (-2) = -8 \Leftrightarrow a + b = 4$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 4 \\ b - a = 2 \end{cases}$, temos $b = 3$ e $a = 1$.

Logo, o polinômio $P(x)$ será dado por

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \cdot x + 3 = x^2(x-3) - 1 \cdot (x-3) = (x-3)(x^2-1) = (x-3)(x+1)(x-1)$.

Assim, as raízes de $P(x)$ são $-1$, 1 e 3 que formam uma P.A. de razão 2, duas são números simétricos, duas são os números a e b, mas nem todas são números naturais.

5) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração. A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é

a) $8 \cdot 7!$
b) $7!$
c) $5 \cdot 4!$
d) $10!$

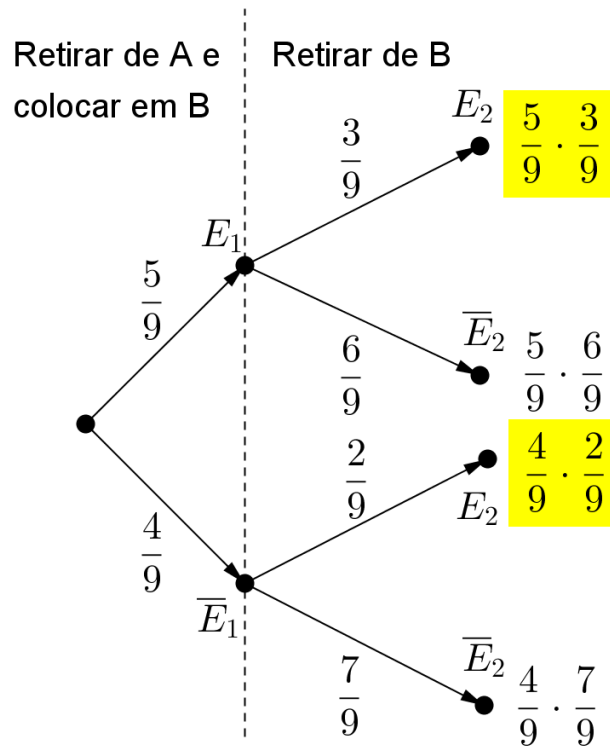
RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Inicialmente vamos reunir as bolas de mesmo número e permutar 7 elementos (as 4 bolas de cores distintas e 3 grupos de 2 bolas de mesma numeração). Feito isso devemos permutar as duas bolas em cada um dos 3 grupos de 2 bolas com mesma numeração.
Logo, o número de maneiras de enfileirar essas 10 bolas é $7!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2! = 8\cdot 7!$.

6) Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 têm espinhos e o vaso B contém 8 rosas sendo que exatamente 6 não têm espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. A probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos é

a) $\frac{8}{81}$
b) $\frac{15}{81}$
c) $\frac{18}{81}$
d) $\frac{23}{81}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O vaso A contém 5 rosas com espinhos e 4 rosas sem espinhos.
O vaso B contém 2 rosas com espinhos e 6 rosas sem espinhos.
Retirando-se uma rosa de A e colocando em B, a probabilidade de essa rosa ter espinho é $\frac{5}{9}$ e a probabilidade de essa rosa não ter espinho é $\frac{4}{9}$.
Se a rosa colocada em B tinha espinhos, o vaso B passa a ter 3 rosas com espinhos e 6 rosas sem espinhos.
Se a rosa colocada em B não tinha espinhos, o vaso B passa a ter 2 rosas com espinhos e 7 rosas sem espinhos.
Assim, a probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos é $P = \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{23}{81}$.
Isso pode ser melhor visualizado em uma árvore de probabilidades como a que segue.

No diagrama acima, o resultado $E_1$ significa que a rosa retirada de A e colocada em B possuía espinhos e o resultados $\overline{E}_1$ que essa rosa não possuía espinhos. Da mesma forma, o resultado $E_2$ significa que a rosa retirada de B no segundo experimento possuía espinhos, enquanto o resultado $\overline{E}_2$ significa que essa rosa não possuía espinhos.
O raciocínio acima é consequência do teorema da Probabilidade Total. Assim, temos:

$$P(E_2) = P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E}_1) \cdot P(\overline{E}_1) = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{23}{81}.$$

7) Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Sabe-se que $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n vezes}}$. Então, o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$ é igual a

a) 1
b) $-31$
c) $-875$
d) $-11$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Observando que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade, todas as parcelas de expoente par serão iguais à matriz identidade e as parcelas de expoente ímpar serão iguais a A.

Assim, temos:

$$S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11} = 6 \cdot A + 5 \cdot I = 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$$

Logo, o determinante da matriz S é $\det S = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = -11$.

8) Considere os pontos $A(4,-2)$, $B(2,0)$ e todos os pontos $P(x,y)$, sendo x e y números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo. É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos $P(x,y)$ são tais que

a) são equidistantes de $C(2,-1)$.

b) o maior valor de x é $3+\sqrt{2}$.

c) o menor valor de y é $-3$.

d) x pode ser nulo.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Se os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo, então, pelo teorema de Pitágoras, temos: $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$.

$$\overline{PA}^2 = (x-4)^2 + (y-(-2))^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$$

$$\overline{PB}^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$\overline{AB}^2 = (4-2)^2 + (-2-0)^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8.$$

Assim, temos:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (x-2)^2 + y^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = -8 + 9 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$$

Logo, os pontos $P(x,y)$ estão em uma circunferência de centro $(3,-1)$ e raio $\sqrt{2}$.

Sendo assim, os pontos $P(x,y)$ são equidistantes de $(3,-1)$, $x \in [3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}]$ e $y \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$. Note que $3-\sqrt{2} > 0$, então x não pode ser nulo.

Portanto, a alternativa correta é a que afirma que o maior valor de x é $3+\sqrt{2}$.

Observe que seria possível chegar a essas conclusões considerando que a hipotenusa $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo. Logo, todos os pontos P pertencem à circunferência de centro no ponto médio de $\overline{AB}$, $(3,-1)$, e raio metade de $\overline{AB}$, $\sqrt{2}$.

9) Analise as proposições abaixo e escreva V para a(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

I) (  ) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2 + 4x - 4 = 0$ é igual a 1 unidade de comprimento.

II) ( ) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.

III) ( ) A equação $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto $P(1,4)$.

A sequência correta é

a) F – F – V
b) V – F – V
c) F – V – F
d) V – V – F

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

I) (V) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2 + 4x - 4 = 0$ é igual a 1 unidade de comprimento.

$y^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -4(x-1)$

Logo, a parábola possui eixo de simetria horizontal, concavidade voltada para a esquerda, vértice $(1,0)$ e parâmetro $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$. A distância entre o vértice e o foco da parábola é $VF = \frac{p}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

II) (V) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.

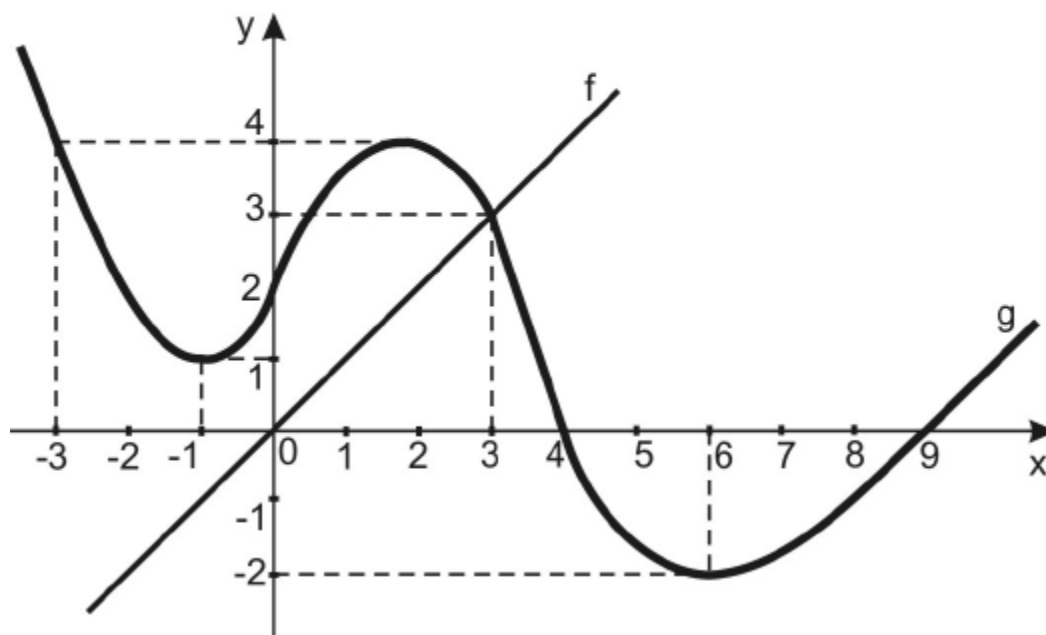
Na hipérbole equilátera, os semieixos a e b são iguais e o retângulo de base é um quadrado. As assíntotas são as diagonais desse quadrado e, portanto, são perpendiculares.

III) (F) A equação $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto $P(1,4)$.

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

Logo, a equação representa uma elipse de centro $(1,2)$, semieixo maior vertical $a = \sqrt{2}$ e semieixo menor $b = 1$.

Na elipse, temos $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 = 1^2 + c^2 \Leftrightarrow c = 1$. Portanto, os focos são $(1, 2+1) = (1,3)$ e $(1, 2-1) = (1,1)$.

10) Considere as funções reais $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados abaixo.

Sobre essas funções, é correto afirmar que

a) $\forall x\in[0,4],\ g(x)-f(x)>0$

b) $f(g(0))-g(f(0))>0$

c) $\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{[f(x)]^2}\le 0,\ \ \forall x\in\,]-\infty,0[\,\cup[4,9]$

d) $\forall x\in[0,3]$ tem-se $g(x)\in[2,3]$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Note, inicialmente, que $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) INCORRETA: se $x\in[0,3[\,\Rightarrow g(x)>f(x)$, mas se $x\in\,]3,4]\Rightarrow f(x)>g(x)$.

b) INCORRETA: $f(g(0))-g(f(0))=f(2)-g(0)=2-2=0$.

c) CORRETA: $\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{g(x)}{f(x)}\le 0,\ \ \forall x\in\,]-\infty,0[\,\cup[4,9]$, ou seja, sempre que as duas funções têm sinais contrários e f é não nula.

d) INCORRETA: $\forall x\in[0,3]$ tem-se $g(x)\in[2,4]$.

11) Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contatou dois eletricistas. O Sr. Luiz que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:

Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento. Com relação às informações acima, é correto afirmar que

a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00.
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

O gráfico que representa o valor total do serviço do Sr. Luiz é uma reta que passa pelos pontos $(15,80)$ e $(25,100)$. Sendo assim, sua equação é dada por

$$\frac{y-80}{x-15}=\frac{100-80}{25-15} \Leftrightarrow y-80=2(x-15) \Leftrightarrow y=2x+50 .$$

Logo, conclui-se que o Sr. Luiz cobra R$ 50,00 pelo orçamento (parte fixa) e mais R$ 2,00 por metro de fio instalado.

O valor total do serviço prestado pelo Sr. José é dado pela equação $y=4,5x$.

Essas duas equações apresentam o mesmo valor quando $4,5x=2x+50 \Leftrightarrow 2,5x=50 \Leftrightarrow x=20$.

Assim, para a instalação de menos de 20 m de fio é melhor contratar o Sr. José, para a instalação de mais de 20 m de fio é melhor contratar o Sr. Luiz e para instalar 20 m de fio os dois eletricistas cobram o mesmo valor.

a) INCORRETO: o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é R$ 50,00.
b) INCORRETO: O Sr. Luiz cobra R$ 2,00 por metro de fio instalado.
c) INCORRETO: para a instalação de mais de 20 m de fio é melhor contratar o Sr. Luiz e para instalar 20 m de fio os dois eletricistas cobram o mesmo valor.
d) CORRETO

12) Considere as funções reais f, g e h tais que

$f(x) = mx^2 - (m+2)x + (m+2)$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = \sqrt{x}$

Para que a função composta $h \circ g \circ f(x)$ tenha domínio $D = \mathbb{R}$, deve-se ter

a) $m > \frac{2}{3}$

b) $-2 < m < \frac{2}{3}$

c) $0 < m < \frac{2}{3}$

d) $-2 < m < 0$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x)))$

Para que $g(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$ esteja definida em todos os reais, devemos ter $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Para que $h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))) = h\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \sqrt{\frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, devemos ter $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Fazendo a interseção das duas condições, devemos ter $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = mx^2 - (m+2)x + (m+2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m > 0 \wedge \Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \cdot m \cdot (m+2) < 0$

$\Leftrightarrow m > 0 \wedge \left(m < -2 \vee m > \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$

A inequação correspondente a $\Delta < 0$ encontra-se resolvida a seguir:

$\Delta = (m+2)[m+2-4m] = (m+2)(-3m+2) < 0 \Leftrightarrow m < -2 \vee m > \frac{2}{3}$.

13) Considere a função real f definida por $f(x) = a^x$ com $a \in ]0,1[$. Sobre a função real g definida por $g(x) = |-b - f(x)|$ com $b \in ]-\infty, -1[$, é correto afirmar que

a) possui raiz negativa e igual a $\log_a(-b)$.

b) é crescente em todo o seu domínio.

c) possui valor máximo.

d) é injetora.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$g(x)=|-b-f(x)|=|-b-a^x|$

$g(x)=0 \Leftrightarrow |-b-a^x|=0 \Leftrightarrow a^x=-b>0 \Leftrightarrow x=\log_a(-b)$ é raiz de $g(x)$.

Vamos identificar o sinal de $\log_a(-b)$.

$b<-1 \Leftrightarrow -b>1 \Leftrightarrow \log_a(-b)<\log_a 1=0$.

Note que, ao aplicarmos o logaritmo na base a, o sinal da desigualdade foi invertido, pois $a \in ]0,1[$.

Sendo assim, $\log_a(-b)$ é a raiz de $g(x)$ e é negativa.

A função $f(x)=a^x$, com $a \in ]0,1[$ é decrescente e sempre positiva.

A função $h(x)=-b-a^x$ é crescente, mas ela é negativa para valores menores do que $\log_a(-b)$ e positiva para valores maiores.

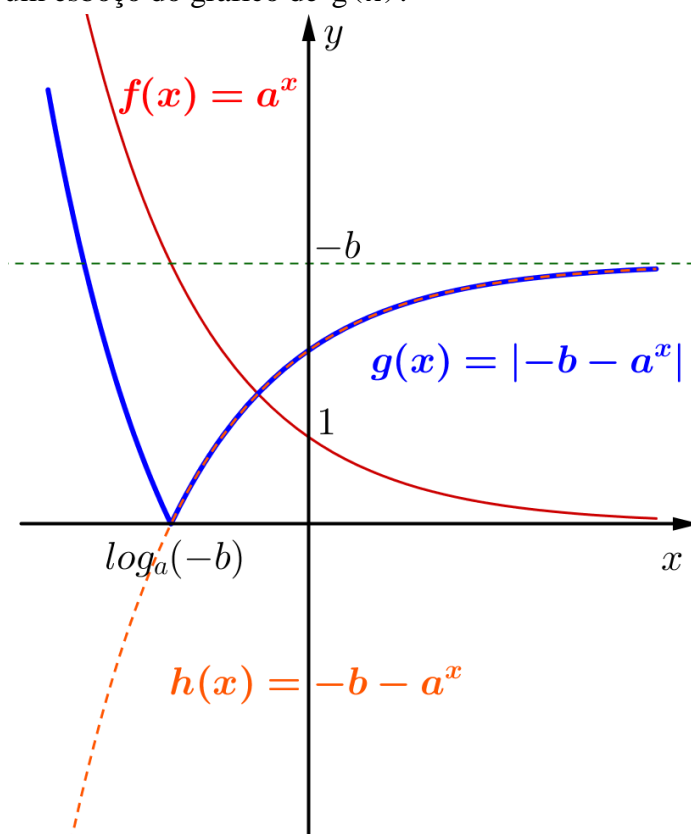
Logo, a função $g(x)=|-b-f(x)|=|-b-a^x|$ é sempre não negativa, mas é decrescente para valores menores do que $\log_a(-b)$ e crescente para valores maiores.

a) CORRETA: conforme mostrado acima.

b) INCORRETA: $g(x)$ é decrescente para valores menores do que $\log_a(-b)$.

c) INCORRETA: $g(x)$ possui valor mínimo 0 e é ilimitada superiormente.

d) INCORRETA: $g(x)$ não é monótona, logo não é injetora.

A seguir é apresentado um esboço do gráfico de $g(x)$.

14) Considere a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$. Sobre f é FALSO afirmar que

a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
b) f é par.
c) f é injetora.
d) $B = \{2\}$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
a) VERDADEIRA
O domínio de f é tal que $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$, o que implica $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Logo, o domínio é $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
b) VERDADEIRA

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,3x\cos x - \cos 3x\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x\cos x} = \frac{\text{sen}(3x - x)}{\frac{1}{2} \cdot 2\,\text{sen}\,x\cos x} = 2 \cdot \frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,2x} = 2$$

Logo, $f(-x) = f(x) = 2$, o que implica que f é par.
c) FALSA
Como todos os elementos do domínio têm imagem 2, f não é injetora.
d) VERDADEIRA
Como é dado que f é sobrejetora, então o contradomínio é igual a imagem. Já mostramos que a imagem de f é $\text{Im}_f = \{2\}$, então o contradomínio é $B = \{2\}$.

15) Considere a região E do plano cartesiano dada por $E = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{x}{3} \leq 1 \\ y + x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. O volume do sólido gerado, se E efetuar uma rotação de $270°$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ em unidades de volume, é igual a

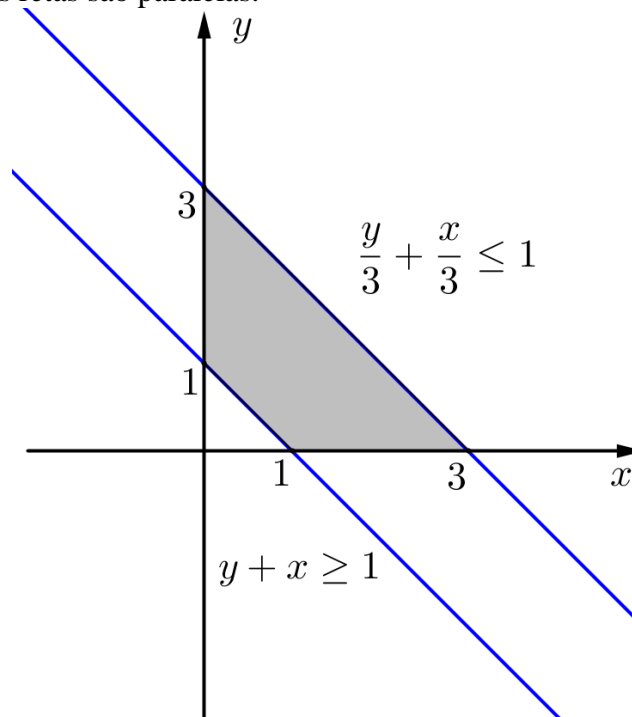
a) $\frac{26\pi}{3}$
b) $26\pi$
c) $\frac{13\pi}{2}$
d) $\frac{13\pi}{3}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

A equação $\frac{y}{3}+\frac{x}{3}\leq 1$ representa a região abaixo da reta que passa pelos pontos $(3,0)$ e $(0,3)$.

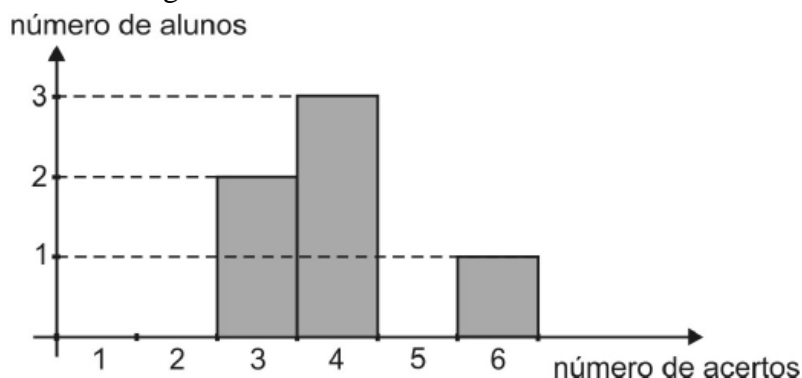
A equação $y+x\geq 1$ representa a região acima da reta que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$.

Note ainda que essas duas retas são paralelas.

Efetuando uma rotação de $270°$ em torno do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$, obtém-se um sólido correspondente a $\frac{3}{4}$ de um cone de vértice em $(3,0)$ (cone maior) menos outro sólido correspondente a $\frac{3}{4}$ de um cone de vértice em $(1,0)$ (cone menor).

O cone maior tem raio da base 3 e altura 3, logo seu volume é $V_{maior}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3=\frac{27\pi}{4}$.

O cone maior tem raio da base 1 e altura 1, logo seu volume é $V_{menor}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 1=\frac{\pi}{4}$.

Portanto, o volume pedido é $V=V_{maior}-V_{menor}=\frac{27\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{26\pi}{4}=\frac{13\pi}{2}$ unidades de volume.

16) Um cursinho de inglês avaliou uma turma completa sendo que parte dos alunos fez a avaliação A, cujo resultado está indicado no gráfico abaixo.

Os demais alunos fizeram a avaliação B e todos tiveram 4 acertos. Assim, o desvio padrão obtido a partir do gráfico acima ficou reduzido à metade ao ser apurado o resultado da turma inteira. Essa turma do cursinho de inglês tem

a) mais de 23 alunos.
b) menos de 20 alunos.
c) 21 alunos.
d) 22 alunos.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Vamos analisar, inicialmente, a avaliação A.

A média das notas foi $\frac{2\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 6}{2+3+1}=4$.

O desvio padrão foi $\delta_A=\sqrt{\frac{2\cdot(4-3)^2+3\cdot(4-4)^2+1\cdot(6-4)^2}{6}}=\sqrt{\frac{2+4}{6}}=1$.

A avaliação B tem média 4 e desvio padrão nulo.

Supondo que a turma tenha n alunos, a média da turma foi $\frac{2\cdot 3+(n-3)\cdot 4+1\cdot 6}{n}=4$, o que já era esperado, pois os dois grupos tinham mesma média.

O desvio padrão da turma inteira é dado por

$$\delta_{turma}=\sqrt{\frac{2\cdot(4-3)^2+(n-3)\cdot(4-4)^2+1\cdot(6-4)^2}{n}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{6}{n}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow n=24.$$

Portanto, a turma tem mais de 23 alunos.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2014/2015

1) Considerando a circunferência de equação $\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, é correto afirmar que

a) $\lambda$ é concêntrica com $\alpha : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

b) o ponto $O(0,0)$ é exterior a $\lambda$.

c) a reta $r : x - y + 3 = 0$ é tangente a $\lambda$.

d) $\lambda$ é simétrica da circunferência $\beta : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, em relação ao ponto $O(0,0)$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$\lambda : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 1 + 4$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

Portanto, $\lambda$ é uma circunferência de centro $(-1,2)$ e raio $3$.

a) INCORRETA: O centro $\alpha : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ é $(1,2)$ que não coincide com o centro de $\lambda$.

b) INCORRETA: A distância de $O(0,0)$ ao ponto $(-1,2)$, centro de $\lambda$, é $\sqrt{(0-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} < 3$, o que implica que o ponto $O$ é interior à $\lambda$.

b) INCORRETA: A distância da reta $r : x - y + 3 = 0$ ao ponto $(-1,2)$, centro de $\lambda$, é $\frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 0 \neq 3$, o que implica que a reta $r$ não é tangente à $\lambda$. Na verdade $r$ passa pelo centro de $\lambda$.

d) CORRETA: A circunferência $\beta : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$ tem centro $(1,-2)$ e raio $3$. Assim, o centro de $\beta$ e simétrico ao centro de $\lambda$ em relação ao ponto $O(0,0)$ e as duas circunferências possuem o mesmo raio $3$, o que implica que $\lambda$ é simétrica de $\beta$ em relação a $O(0,0)$.

2) Seja o quadrado $ABCD$ e o ponto $E$ pertencente ao segmento $\overline{AB}$. Sabendo-se que a área do triângulo $ADE$, a área do trapézio $BCDE$ e a área do quadrado $ABCD$ formam juntas, nessa ordem, uma Progressão Aritmética (P.A.) e a soma das áreas desses polígonos é igual a $800 \text{ cm}^2$, tem-se que a medida do segmento $\overline{EB}$

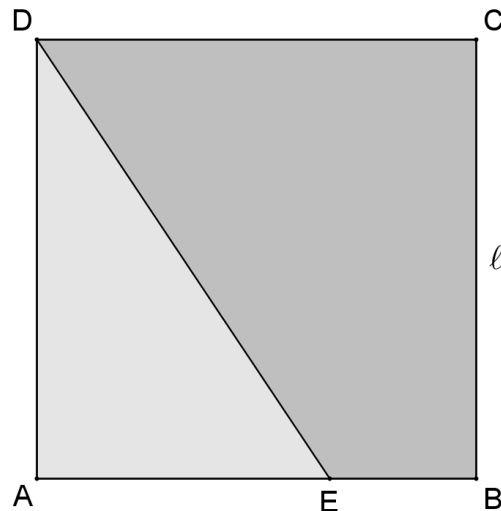
a) é fração própria.

b) é decimal exato.

c) é decimal não exato e periódico.

d) pertence ao conjunto $A = \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\text{PA}:\begin{cases} S_{ADE} = S - r \\ S_{BCDE} = S \\ S_{ABCD} = S + r \end{cases} \Leftrightarrow S_{ADE} + S_{BCDE} + S_{ABCD} = 3 \cdot S = 800 \Leftrightarrow S = \frac{800}{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{ADE} + S_{BCDE} \Leftrightarrow S + r = S - r + S \Leftrightarrow r = \frac{S}{2} = \frac{400}{3}$$

$$S_{ABCD} = \ell^2 = \frac{800}{3} + \frac{400}{3} = 400 \Leftrightarrow \ell = 20 \text{ cm}$$

$$S_{BCDE} = \frac{\left(20 + \overline{EB}\right) \cdot 20}{2} = \frac{800}{3} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

Assim, $\overline{EB} = \frac{20}{3}$ cm é um decimal não exato e periódico.

3) Considere num mesmo sistema cartesiano ortogonal as funções reais $f$, $g$ e $h$ tais que:

- $f$ é uma função quadrática que contém o ponto $S$ simétrico do ponto $P(0,-27)$, em relação ao eixo $\overrightarrow{OX}$;
- $g$ é a função afim que passa pelos pontos $Q(-1,12)$ e $R(3,0)$;
- os pontos $Q$ e $R$ também pertencem à função $f$;
- $h$ é uma função constante cujo gráfico intercepta o gráfico da função $g$ no ponto de abscissa $-7$.

Analise os gráficos das funções $f$, $g$ e $h$ e marque a alternativa correta.

a) $g(x) \geq f(x)$ se, e somente se, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

b) A função real $j$ dada por $j(x) = \sqrt{-f(x) \cdot g(x)}$ está definida se, e somente se, $x \in ]-\infty, 3]$.

c) Se $-1 \leq x \leq 3$, então $f(x) \geq g(x)$.

d) $f(x) < g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -7$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO: (O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta)

A função quadrática $f$ passa pelos pontos $S(0,27)$, $Q(-1,12)$ e $R(3,0)$. Assim, a função pode ser escrita na forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Substituindo cada um dos pontos na expressão de $f$, temos:

$S(0,27)\in f \Leftrightarrow f(0)=c=27$

$R(3,0)\in f \Leftrightarrow f(3)=a\cdot 3^2+b\cdot 3+27=0 \Leftrightarrow 3a+b=-9$

$Q(-1,12)\in f \Leftrightarrow f(-1)=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+27=12 \Leftrightarrow a-b=-15$

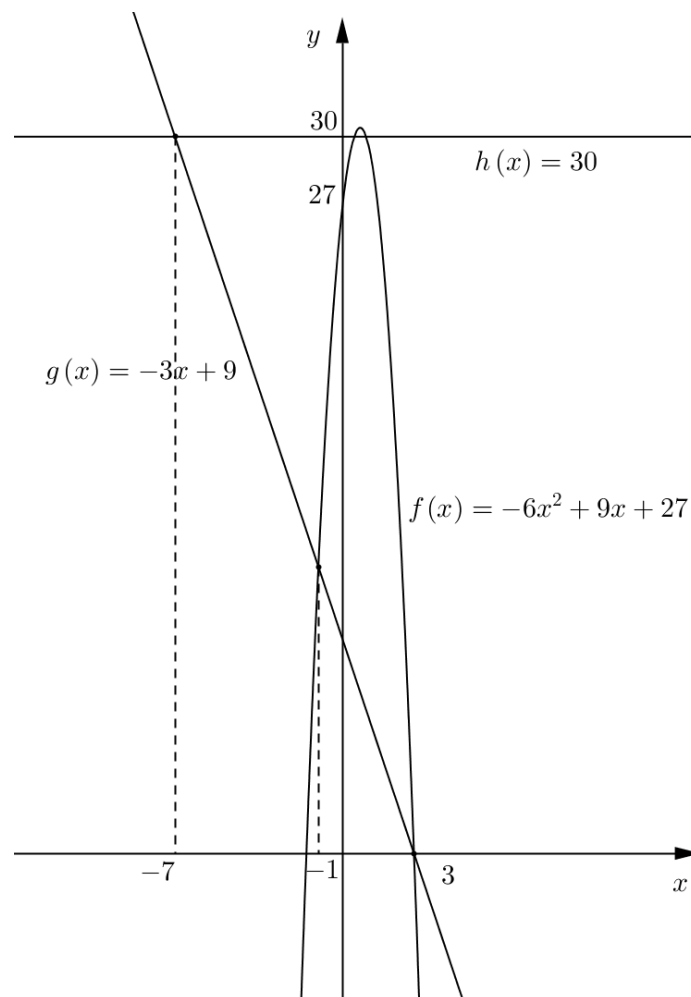
$\Leftrightarrow a=-6 \ \wedge\ b=9$

Portanto, $f(x)=-6x^2+9x+27$.

A função $g$ é uma função afim que passa pelos pontos $Q(-1,12)$ e $R(3,0)$, então pode ser escrita na forma $g(x)=\alpha(x-3)$. Mas, $Q(-1,12)\in g \Leftrightarrow g(-1)=\alpha(-1-3)=12 \Leftrightarrow \alpha=-3$.

Portanto, $g(x)=-3x+9$.

O ponto de abscissa $-7$ no gráfico de $g(x)=-3x+9$ possui ordenada $g(-7)=-3\cdot(-7)+9=30$.

Portanto, $h(x)=30$.

a) INCORRETA

$g(x)\geq f(x) \Leftrightarrow -3x+9\geq -6x^2+9x+27 \Leftrightarrow x^2-2x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1 \ \vee\ x\geq 3$

b) INCORRETA

$j(x)=\sqrt{-(f(x))\cdot g(x)}=\sqrt{-(-6x^2+9x+27)\cdot(-3x+9)}=\sqrt{-9(2x^2-3x-9)(x-3)}$

A função $j$ está definida se, e somente se,

$(2x^2-3x-9)(x-3)\le 0 \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)^2\le 0 \Leftrightarrow x\le -\frac{3}{2} \vee x=3$.

Assim, $D(j)=\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\{3\}$.

c) CORRETA

$f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow -6x^2+9x+27\ge -3x+9\Leftrightarrow x^2-2x-3\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 3$

d) INCORRETA

$f(x)<g(x)\Leftrightarrow x<-1 \vee x>3$

$g(x)\le h(x)\Leftrightarrow -3x+9\le 30\Leftrightarrow x\ge -7$

Fazendo a interseção dos dois intervalos, temos $-7\le x<-1$ ou $x>3$.

4) Considere o polinômio $p(x)=ax^4+bx^3+2x^2+1$, $\{a,b\}\subset\mathbb{R}$ e marque a alternativa FALSA.

a) $x=0$ não é raiz do polinômio $p(x)$.

b) Existem valores distintos para $a$ e $b$ tais que $x=1$ e $x=-1$ são raízes de $p(x)$.

c) Se $a=0$ e $b=3$, o resto da divisão de $p(x)$ por $3x^2-x+1$ é zero.

d) Se $a=b=0$ tem-se que $x=-\frac{1}{2}i$ é uma raiz de $p(x)$, considerando que $i^2=-1$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: (O texto da alternativa b foi adaptado para ficar mais coerente)

a) VERDADEIRA

Como $p(0)=1\ne 0$, então $x=0$ não é raiz de $p(x)$.

b) VERDADEIRA

$p(1)=a\cdot 1^4+b\cdot 1^3+2\cdot 1^2+1=0\Leftrightarrow a+b=-3$

$p(-1)=a\cdot(-1)^4+b\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+1=0\Leftrightarrow a-b=-3$

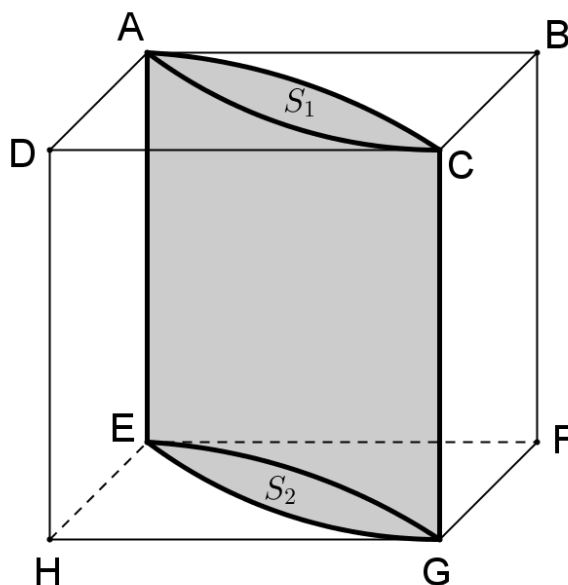
Assim, $a=-3$ e $b=0$.

c) VERDADEIRA

$p(x)=3x^3+2x^2+1=(3x^2-x+1)(x+1)$, ou seja, o resto da divisão citada é zero.

d) FALSA

$p(x)=2x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$

5) Na figura abaixo, tem-se um cubo cuja aresta mede $k$ centímetros; as superfícies $S_1$ e $S_2$, contidas nas faces desse cubo, são limitadas por arcos de circunferências de raio $k$ centímetros e centros em, respectivamente, $D$ e $B$, $H$ e $F$.

O volume do sólido formado por todos os segmentos de reta com extremidades em $S_1$ e $S_2$, paralelos a $\overline{CG}$ e de bases $S_1$ e $S_2$, é, em $cm^3$, igual a

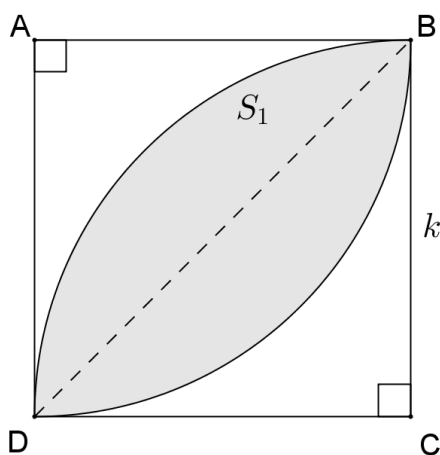
a) $\frac{k^3(\pi-1)}{2}$

b) $\frac{k^3(\pi-2)}{2}$

c) $\frac{k^3(\pi-1)}{4}$

d) $\frac{k^3(\pi-2)}{4}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

O sólido possui bases de área $S_1 = S_2$ e a altura é $k$.

A área $S_1$ é igual à soma de dois segmentos circulares de $90^\circ$ e raio $k$, ou seja, $S_1 = 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot k^2}{4} - \frac{k^2}{2}\right) = \frac{k^2(\pi-2)}{2}$.

Assim, o volume do sólido é $V = S_1 \cdot k = \frac{k^3(\pi-2)}{2}$.

6) Considere os números complexos $z_1 = x - i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$, $z_3 = -1+2i$ e $z_4 = x + yi$ em que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ e $i^2 = -1$ e as relações:

I. $\text{Re}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \le \text{Im}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right)$

II. $|z_3 \cdot z_4| = \sqrt{5}$

O menor argumento de todos os complexos $z_4$ que satisfazem, simultaneamente, as relações I e II é

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $0$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{3}$

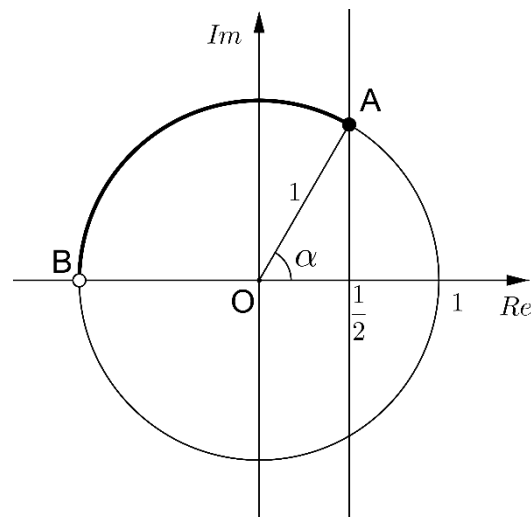
RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: (O enunciado dessa questão foi adaptado para ficar mais coerente)

$$\text{Re}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = \text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)x + 0 = x$$

$$\text{Im}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = \text{Im}\left((x+i) + \left(-\frac{1}{2}i\right)\right) = \text{Im}\left(x + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Re}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \le \text{Im}\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$|z_3 \cdot z_4| = |z_3||z_4| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (**)$$

Representando as condições (*) e (**) no plano de Argand-Gauss e considerando que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_+^*$, obtém-se, para o lugar geométrico dos números complexos $z_4 = x + yi$, um arco de circunferência com extremidades em $A$ e $B$.
Dentre esses números complexos, o de menor argumento é o com extremidade em $A$, cujo argumento é $\alpha$ tal que $\cos\alpha = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ rad.

7) Alex possui apenas moedas de 25 centavos, de 50 centavos e de 1 real, totalizando 36 moedas. Sabe-se que a soma do número de moedas de 25 centavos com o dobro do número de moedas de 50 centavos é igual à diferença entre 82 e 5 vezes o número de moedas de 1 real. Nessas condições é correto afirmar que
a) esse problema possui no máximo 7 soluções.
b) o número de moedas de 25 centavos nunca será igual ao número de moedas de 50 centavos.
c) o número de moedas de 50 centavos poderá ser igual à soma do número de moedas de 25 centavos com as de 1 real.
d) o número de moedas de 1 real pode ser 3.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Sejam $x$, $y$ e $z$ os números de moedas de 25 centavos, 50 centavos e 1 real, respectivamente. Assim, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=36 \\ x+2y=82-5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=36-z \\ x+2y=82-5z \end{cases} \Leftrightarrow y=46-4z \wedge x=3z-10$$

Como $x$, $y$ e $z$ são números de moedas, então devem ser números naturais. Assim, temos:

$$y=46-4z \geq 0 \Leftrightarrow z \leq 11,5 \Leftrightarrow z \leq 11$$

$$x=3z-10 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow z \geq 4$$

Logo, $z \in \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$ e para cada valor de $z$ temos uma solução da forma $(3z-10, 46-4z, z)$. Portanto, o problema possui 8 soluções.
a) INCORRETA: observe o desenvolvimento acima.

b) INCORRETA: $x = y \Leftrightarrow 3z - 10 = 46 - 4z \Leftrightarrow 7z = 56 \Leftrightarrow z = 8$. Assim, uma solução válida é $(14, 14, 8)$.
c) CORRETA: $y = x + z \Leftrightarrow 46 - 4z = 3z - 10 + z \Leftrightarrow 8z = 56 \Leftrightarrow z = 7$. Assim, uma solução válida é $(11, 18, 7)$.
d) INCORRETA: $z \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

8) Nas expressões $x$, $y$ e $z$, considere a simbologia:
- $\log$ é o logaritmo decimal;
- $i$ é a unidade imaginária dos números complexos;
- sen é o seno de um arco; e
- $n!$ é o fatorial de $n$.

Se $x = \dfrac{3\log(100!)}{\log 1 + \log 8 + \log 27 + \cdots + \log 100^3}$, $y = \dfrac{i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}}$ e
$z = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha + \pi) + \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) + \cdots + \operatorname{sen}(\alpha + 99\pi)$, então o valor de $x^y + z$ é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$x = \frac{3\log(100!)}{\log 1 + \log 8 + \log 27 + \cdots + \log 100^3} = \frac{3\log(100!)}{\log 1^3 + \log 2^3 + \log 3^3 + \cdots + \log 100^3} =$$

$$= \frac{3\log(100!)}{3\log 1 + 3\log 2 + 3\log 3 + \cdots + 3\log 100} = \frac{3\log(100!)}{3\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)} = \frac{3\log(100!)}{3\log(100!)} = 1$$

$$y = \frac{i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}} = \frac{\overbrace{(i + i^2 + i^3 + i^4)}^{0} + \cdots + \overbrace{(i^{97} + i^{98} + i^{99} + i^{100})}^{0}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}} = 0$$

$$z = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha + \pi) + \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) + \operatorname{sen}(\alpha + 3\pi) + \cdots + \operatorname{sen}(\alpha + 98\pi) + \operatorname{sen}(\alpha + 99\pi) =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha + (-\operatorname{sen}\alpha) + \operatorname{sen}\alpha + (-\operatorname{sen}\alpha) + \cdots + \operatorname{sen}\alpha + (-\operatorname{sen}\alpha) = 0$$

Note que $\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha, k \in \mathbb{Z}$ e $\operatorname{sen}(\alpha + (2k+1)\pi) = \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}\alpha, k \in \mathbb{Z}$.
Assim, $x^y + z = 1^0 + 0 = 1$.

9) Considere as funções reais $f$ e $g$ definidas por $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\operatorname{sen}(2x) & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$, $g(x) = \dfrac{1}{2} - f(x)$
e marque a alternativa INCORRETA.
a) O conjunto imagem da função $f$ é o intervalo $[0, 1]$.

b) A função $g$ é ímpar.

c) A função real $h$ definida por $h(x) = -\frac{1}{2} + g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) O período da função real $j$ definida por $j(x) = \left|-\frac{1}{2} + g(x)\right|$ é $\frac{\pi}{2}$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\text{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\text{sen}(2x)\cos(2x)) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \text{sen}(4x))$$

$g(x) = \frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1 - \text{sen}(4x)) = \frac{\text{sen}(4x)}{2}$ que é um função ímpar.

a) CORRETA:

$$-1 \le \text{sen}(4x) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\text{sen}(4x) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1 - \text{sen}(4x) \le 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{2} \cdot (1 - \text{sen}(4x)) \le 1 \Rightarrow \text{Im}(f) = [0,1]$$

b) CORRETA: $g(-x) = \frac{\text{sen}(4(-x))}{2} = \frac{\text{sen}(-4x)}{2} = \frac{-\text{sen}(4x)}{2} = -g(x)$, o que implica que $g$ é uma função ímpar

c) INCORRETA:

$$h(x) = -\frac{1}{2} + g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(4x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(4x) = 1 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{8}\right\}$, ou seja, há apenas uma raiz nesse intervalo.

d) CORRETA:

$$j(x) = \left|-\frac{1}{2} + g(x)\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(4x)}{2}\right|$$

$$-1 \le \frac{-1 + \text{sen}(4x)}{2} \le 0 \Rightarrow j(x) = \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(4x)}{2}$$

Assim, o período de $j$ é $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

10) Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:
I. obrigatoriamente, conhecer o estádio do Maracanã.
II. se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em $12$ estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação I e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação II, nessa ordem, é

a) $\frac{11}{26}$

b) $\frac{13}{25}$

c) $\frac{13}{24}$

d) $\frac{11}{24}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Situação I: Nesse caso, o turista vai conhecer o Maracanã e mais $2$ estádios que ele deve escolher entre os $11$ restantes. Assim, o número de modos distintos é $C_{11}^{2}=\frac{11\cdot 10}{2}=55$.

Situação II: Temos duas possibilidades. Na primeira, ele conhece o Mineirão, a Arena Pantanal e mais um estádio que ele deve escolher entre os $10$ restantes, o que pode ocorrer de $C_{10}^{1}=10$ maneiras distintas. Na segunda, ele deve escolher $3$ estádios entre $10$, excluindo-se o Mineirão, a Arena Pantanal, o que pode ocorrer de $C_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$. Assim, o número de modos distintos na situação II é $10+120=130$.

Dessa forma, a razão pedida é $\frac{55}{130}=\frac{11}{26}$.

11) Considere as seguintes simbologias em relação à matriz $M$:

$M^t$ é a matriz transposta de $M$

$M^{-1}$ é a matriz inversa de $M$

$\det M$ é o determinante da matriz $M$

Da equação $\left(X^t\right)^{-1}=A\cdot(B+C)$, em que $A$ e $(B+C)$ são matrizes quadradas de ordem $n$ e inversíveis, afirma-se que

I. $X=\left(A^{-1}\right)^t\cdot\left[(B+C)^{-1}\right]^t$

II. $\det X=\frac{1}{\det A\cdot\det(B+C)}$

III. $X^{-1}=\left(B^t+C^t\right)\cdot A^t$

São corretas

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) I, II e III.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$(X^t)^{-1} = A \cdot (B+C)$

I. CORRETA

$(X^t)^{-1} = A \cdot (B+C) \Leftrightarrow X^t = (A \cdot (B+C))^{-1} = (B+C)^{-1} \cdot A^{-1}$

$\Leftrightarrow X = ((B+C)^{-1} \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t \cdot [(B+C)^{-1}]^t$

II. CORRETA

$(X^t)^{-1} = A \cdot (B+C) \Rightarrow \det(X^t)^{-1} = \det[A \cdot (B+C)] \Leftrightarrow \dfrac{1}{\det(X^t)} = \det A \cdot \det(B+C)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\det X} = \det A \cdot \det(B+C) \Leftrightarrow \det X = \dfrac{1}{\det A \cdot \det(B+C)}$

III. CORRETA

$(X^t)^{-1} = A \cdot (B+C) \Leftrightarrow (X^{-1})^t = A \cdot (B+C) \Leftrightarrow X^{-1} = (A \cdot (B+C))^t$

$\Leftrightarrow X^{-1} = (B+C)^t \cdot A^t = (B^t + C^t) \cdot A^t$

12) Um jogo é decidido com um único lançamento do dado cuja planificação está representada abaixo.

Participam desse jogo quatro pessoas: Carlos, que vencerá o jogo se ocorrer face preta ou menor que $3$; José que vencerá se ocorrer face branca e número primo; Vicente vencerá caso ocorra face preta e número par; Antônio vencerá se ocorrer face branca ou número menor que $3$.

Nessas condições, é correto afirmar que

a) Vicente não tem chance de vencer.

b) Carlos tem, sozinho, a maior probabilidade de vencer.

c) a probabilidade de José vencer é o dobro da de Vicente.

d) a probabilidade de Antônio vencer é maior do que a de Carlos.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Carlos vence se sair $1$, $2$, $3$ ou $4$. Assim, sua probabilidade de vencer é $P(C) = \dfrac{4}{6}$.

José vencerá se sair $2$ ou $5$. Assim, sua probabilidade de vencer é $P(J) = \dfrac{2}{6}$.

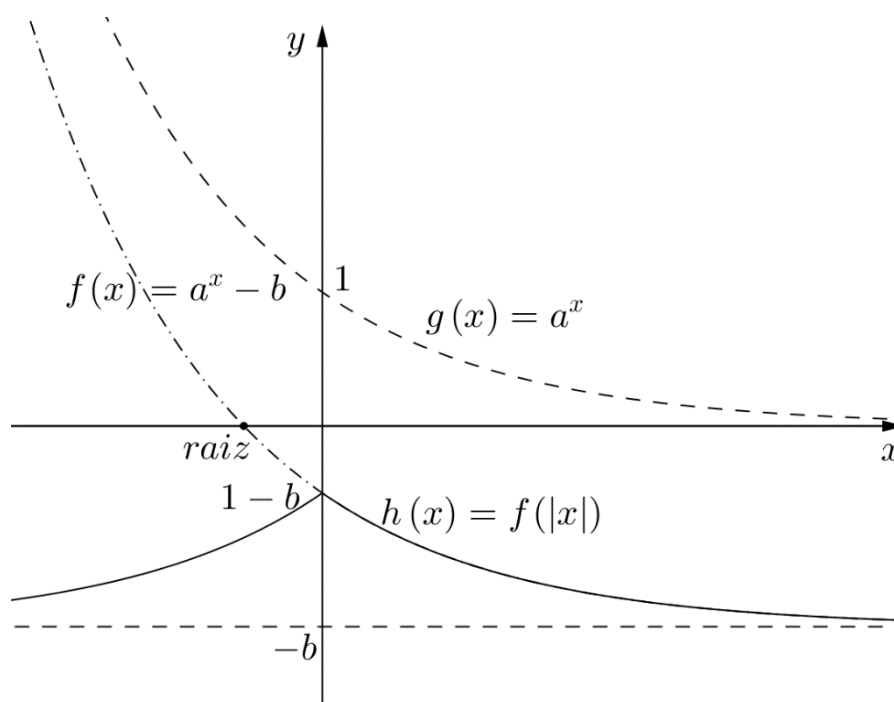
Vicente vencerá se sair $4$. Assim, sua probabilidade de vencer é $P(V)=\frac{1}{6}$.

Antônio vencerá se sair $1$, $2$, $5$ e $6$. Assim, sua probabilidade de vencer é $P(A)=\frac{4}{6}$.

a) INCORRETA: Vicente vencerá se sair $4$.
b) INCORRETA: Carlos e Antônio têm, juntos, a maior probabilidade de vencer.
c) CORRETA: $P(J)=\frac{2}{6}=2\cdot\frac{1}{6}=2\cdot P(V)$
d) INCORRETA: $P(A)=\frac{4}{6}=P(C)$

13) Considere a função real $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a^x-b$, em que $0<a<1$ e $b>1$. Analise as alternativas abaixo e marque a FALSA.
a) Na função $f$, se $x>0$, então $-b<f(x)<1-b$.
b) $\text{Im}(f)$ contém elementos menores que o número real $-b$.
c) A raiz da função $f$ é um número negativo.
d) A função real $h$, definida por $h(x)=f(|x|)$ não possui raízes.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Analisando o gráfico acima de $f(x)=a^x-b$, $0<a<1$ e $b>1$, temos:

$\text{Im}(f)=]-b,+\infty[$

$x>0\Rightarrow -b<f(x)<1-b$

A raiz de $f$ é um número negativo.

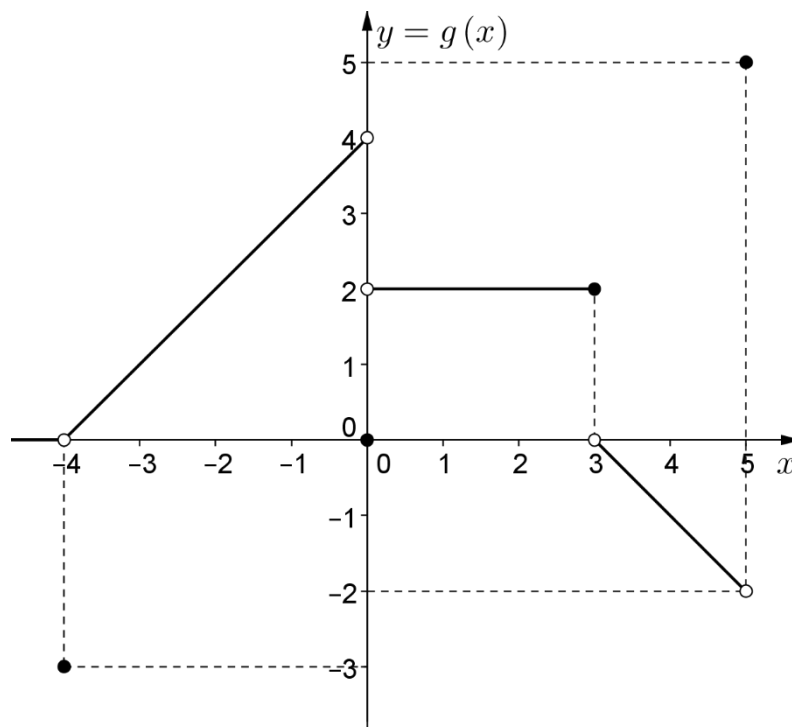
A função $h(x) = f(|x|)$ não possui raízes.
Alternativamente, poderíamos analisar as opções algebricamente como segue.
a) VERDADEIRA
$x > 0 \Leftrightarrow 0 < a^x < 1 \Leftrightarrow -b < a^x - b < 1 - b \Leftrightarrow -b < f(x) < 1 - b$
b) FALSA
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0 \Leftrightarrow a^x - b > -b \Leftrightarrow f(x) > -b \Rightarrow \text{Im}(f) = ]-b, +\infty[$.
Logo, a imagem de $f$ não contém elementos menores que $-b$.
c) VERDADEIRA
$f(x) = a^x - b = 0 \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ que é negativo, pois o logaritmo na base $0 < a < 1$ é decrescente e $\log_a 1 = 0$.
d) VERDADEIRA

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = a^x - b = 0 \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b < 0$

$f(-x) = a^{-x} - b = 0 \Leftrightarrow a^{-x} = b \Leftrightarrow x = -\log_a b > 0$

Portanto, $h(x)$ não possui raízes.

14) Considere o gráfico da função $g : A \to A$ abaixo e marque (V) verdadeiro ou (F) falso.

( ) A função $g$ possui exatamente duas raízes.

( ) $g(4) = -g(-3)$

( ) $\text{Im}(g) = \{-3\} \cup ]-2, 4[$

( ) A função definida por $h(x) = g(x) + 3$ NÃO possui raiz.

(   ) $(g\circ g\circ g\circ\ldots\circ g)(-2)=2$
A sequência correta é
a) F – V – F – F – V
b) F – F – V – F – V
c) F – V – F – V – F
d) V – V – F – F – V

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

A função $g$ é dada por $g(x)=\begin{cases}-3 & \text{se } x=-4\\ x+4 & \text{se } -4<x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ 2 & \text{se } 0<x\le 3\\ -x+3 & \text{se } 3<x<5\\ 5 & \text{se } x=5\end{cases}$.

(F) A função $g$ possui exatamente duas raízes.
A função $g$ possui apenas uma raiz $x=0$.
(V) $g(4)=-g(-3)$
$$\left.\begin{array}{l} g(4)=-4+3=-1\\ g(-3)=-3+4=1\end{array}\right\}\Rightarrow g(4)=-g(-3)$$
(F) $\text{Im}(g)=\{-3\}\cup\,]-2,4[$
A imagem de $g$ é $\text{Im}(g)=\{-3\}\cup\,]-2,4[\,\cup\{5\}$.
(F) A função definida por $h(x)=g(x)+3$ NÃO possui raiz.
$h(-4)=g(-4)+3=-3+3=0$, ou seja, $x=-4$ é raiz de $h$.
(V) $(g\circ g\circ g\circ\ldots\circ g)(-2)=2$
$$g(-2)=2 \ \wedge\ g(2)=2\Rightarrow(g\circ g\circ g\circ\ldots\circ g)(-2)=g\Big(g\big(\ldots g\big(g(-2)\big)\big)\Big)=g\Big(g\big(\ldots g(2)\big)\Big)=2$$
Note que, como $g(2)=2$, então $(g\circ g\circ g\circ\ldots\circ g)(2)=2$, qualquer que seja o número de composições.

15) Considere no plano cartesiano um triângulo equilátero $ABC$ em que:
• os vértices $B$, de abscissa positiva, e $C$, de abscissa negativa, estão sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$;
• possui baricentro no ponto $G\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
Considere também, nesse mesmo plano cartesiano, a circunferência $\lambda_1$ inscrita e a circunferência $\lambda_2$ circunscrita ao triângulo $ABC$.
Analise as proposições abaixo e escreva (V) para verdadeira e (F) para falsa.
(   ) A reta $r$, suporte do lado $AB$, passa pelo ponto $(-1,b)$, em que $b$ é o dobro do oposto do coeficiente angular de $r$.

( ) O círculo delimitado por $\lambda_2$ contém o ponto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

( ) O ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$ pertence a $\lambda_1$.

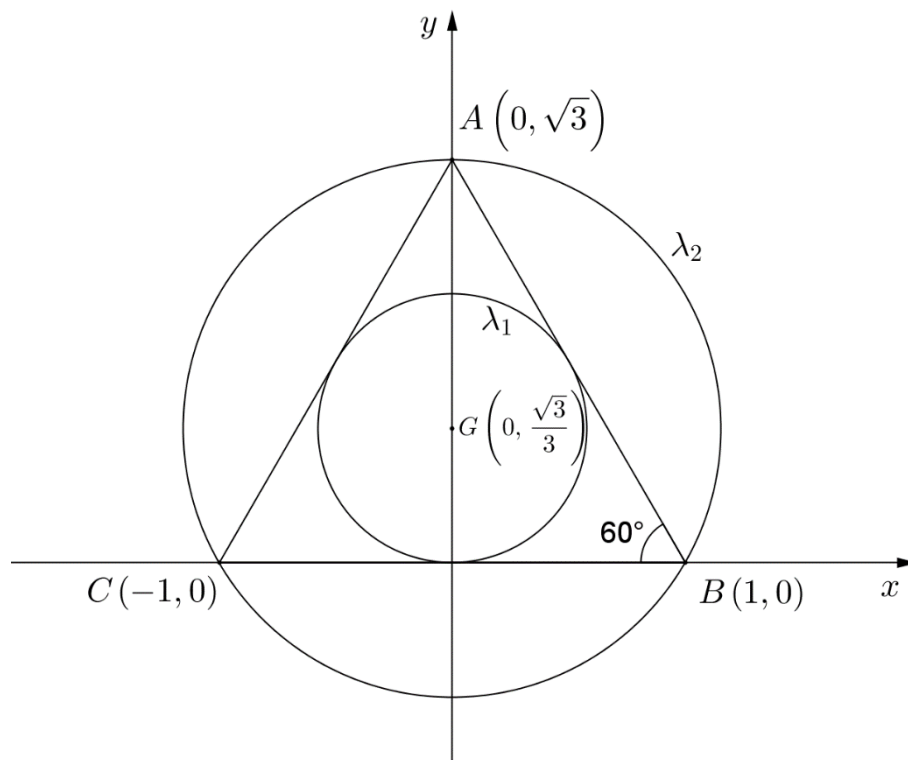
A sequência correta é
a) V – F – V
b) F – F – V
c) V – F – F
d) F – V – F

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Os vértices B e C estão sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$, então o lado $\overline{BC}$ está sobre $\overrightarrow{OX}$.

O baricentro do triângulo ABC é $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, então $\overline{OG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é um terço da altura do triângulo.

Assim, denotando por $\ell$ o lado desse triângulo equilátero, temos: $\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \ell = 2$.

Logo, as coordenados dos vértices do triângulo são $B(1,0)$, $C(-1,0)$ e $A\left(0,\sqrt{3}\right)$ representados na figura a seguir.

1ª) VERDADEIRA
A reta suporte do lado AB é dada por $y = \text{tg}120^\circ \cdot x + \sqrt{3} = -\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} \Rightarrow m_r = -\sqrt{3}$.

$(-1,b) \in r \Leftrightarrow b = -\sqrt{3} \cdot (-1) + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 2 \cdot \left(-\left(-\sqrt{3}\right)\right) = 2 \cdot (-m_r)$

2ª) FALSA

O círculo $\lambda_2$ tem centro $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e raio $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. A distância entre $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ e o centro de $\lambda_2$ é $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} > \frac{2\sqrt{3}}{3} = R$, o que implica que esse ponto é exterior a $\lambda_2$.

3ª) VERDADEIRA

A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta $y = x$ e a sua interseção com $\lambda_1 : (x-0)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ é dada por

$$x^2 + \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

16) No Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil 2013 constam valores do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) de todas as cidades dos estados brasileiros.

O IDHM é um número que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano de um município, conforme escala a seguir.

Abaixo estão relacionados o IDHM de duas cidades de Minas Gerais em condições extremas, Monte Formoso e Uberlândia, e uma situação intermediária, Barbacena.

Analisando os dados acima, afirma-se que
I. o município de maior crescimento do IDHM, nos períodos considerados, é Monte Formoso.
II. na última década, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia.
III. uma tabela que relaciona cidade, época e faixa de IDHM pode ser representada corretamente como:

| | Monte Formoso | Barbacena | Uberlândia |
|---|---|---|---|
| 1991 | Muito baixo | Baixo | Baixo |
| 2000 | Muito baixo | Alto | Alto |
| 2010 | Baixo | Alto | Alto |

São corretas:
a) apenas I e II.
b) apenas II e III.
c) apenas I e III.
d) I, II e III.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
I. CORRETA
O crescimento de Monte Formoso foi superior a $0,3$, enquanto o de Uberlândia e Barbacena foram inferiores a esse valor.
II. CORRETA
Observe que Uberlândia possui IDHM superior a Barbacena, mas a diferença diminuiu de $2000$ para $2010$, o que significa que Barbacena cresceu mais do que Uberlândia.
III. INCORRETA
Barbacena em $2000$ possuía IDHM entre $0,6$ e $0,7$, ou seja, médio.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2013/2014

1) A equação $x^3-4x^2+5x+3=0$ possui as raízes $m$, $p$ e $q$. O valor da expressão $\frac{m}{pq}+\frac{p}{mq}+\frac{q}{mp}$ é
a) –2
b) –3
c) 2
d) 3

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
$$\frac{m}{pq}+\frac{p}{mq}+\frac{q}{mp}=\frac{m^2+p^2+q^2}{mpq}=\frac{(m+p+q)^2-2(mp+mq+pq)}{mpq}$$
Pelas relações de Girard, temos:
$$\sigma_1=m+p+q=\frac{-(-4)}{1}=4$$
$$\sigma_2=mp+mq+pq=\frac{5}{1}=5$$
$$\sigma_3=m\cdot n\cdot p=-\frac{3}{1}=-3$$
Portanto, $\frac{m}{pq}+\frac{p}{mq}+\frac{q}{mp}=\frac{(m+p+q)^2-2(mp+mq+pq)}{mpq}=\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{4^2-2\cdot 5}{-3}=-2$.

2) Distribuiu-se, aleatoriamente, $7$ bolas iguais em $3$ caixas diferentes. Sabendo-se que nenhuma delas ficou vazia, a probabilidade de uma caixa conter, exatamente, $4$ bolas é
a) 25%
b) 30%
c) 40%
d) 48%

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O número total de maneiras de distribuir as $7$ bolas nas caixas é igual ao número de soluções da equação linear $x+y+z=7$, com $x,y,z\geq 1$, onde o valor de cada uma das três variáveis corresponde à quantidade de bolas em cada uma das três caixas.
Para resolver a equação $x+y+z=7$, com $x,y,z\geq 1$, devemos fazer a mudança de variáveis $x'=x-1\geq 0$, $y'=y-1\geq 0$ e $z'=z-1\geq 0$ resultando $(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=7\Leftrightarrow x'+y'+z'=4$.

O número de soluções distintas dessa equação, com $x',y',z'\geq 0$, é igual ao número de maneiras de permutar 2 "tracinhos" e 4 "bolinhas", ou seja, $P_6^{2,4}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$.

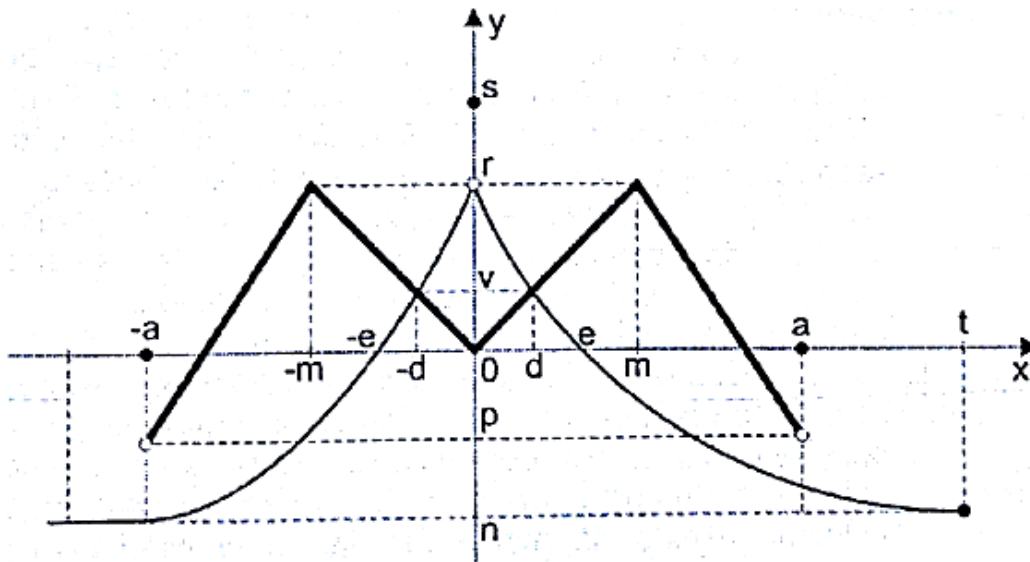
Dessa forma, o número de elementos do espaço amostral $\Omega$ é $\#(\Omega)=15$.

Para que uma caixa contenha exatamente 4 bolas e nenhuma caixa fique vazia, devemos ter uma caixa com 2 bolas e outra com 1 bola. Assim, o número de maneiras disso ocorrer é igual ao número de maneiras de permutar os números 4, 2 e 1 entre as três caixas, ou seja, $P_3=3!=6$.

Dessa forma, o número de casos favoráveis é $\#(A)=6$.

Portanto, a probabilidade de uma caixa conter, exatamente, 4 bolas é

$$P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=40\%.$$

3) Considere os gráficos abaixo das funções reais $f:A\to\mathbb{R}$ e $g:B\to\mathbb{R}$. Sabe-se que $A=[-a,a]$; $B=]-\infty,t]$; $g(-a)<f(-a)$; $g(0)>f(0)$; $g(a)<f(a)$ e $g(x)=n$ para todo $x\leq -a$.

Analise as afirmativas abaixo e marque a **FALSA**.

a) A função $f$ é par.

b) Se $x\in ]d,m[$, então $f(x)\cdot g(x)<0$.

c) $Im(g)=[n,r[\cup\{s\}$

d) A função $h:E\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=\frac{-2}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$ está definida se $E=\{x\in\mathbb{R}\,|-a\leq x<-d \text{ ou } d<x\leq a\}$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

a) VERDADEIRA

O gráfico de $f$ é simétrico em relação ao eixo $Oy$, o que implica $f(-x)=f(x)$.

b) FALSA

Se $x \in \left]d, m\right[$, então $f(x) > 0$. No caso de $g$, temos $g(x) > 0$, se $x \in \left]d, e\right[$, e $g(x) < 0$, se $x \in \left]e, m\right[$. Portanto, $f(x) \cdot g(x) > 0$, se $x \in \left]d, e\right[$, e $f(x) \cdot g(x) < 0$, se $x \in \left]e, m\right[$.

c) VERDADEIRA

Para identificar a imagem da função $g$, devemos observar a projeção de seu gráfico sobre o eixo $Oy$. Observe que no gráfico de $g$ não há pontos de ordenada $r$ e que há um ponto isolado com ordenada $s$. Portanto, $\text{Im}(g) = \left[n, r\right[ \cup \{s\}$.

d) VERDADEIRA

A função $h(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ está definida quando $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow -a \le x < -d$ ou $d < x \le a$.

Observe que os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ pertencem ao gráfico de $f$.

4) Sejam $f$ e $g$ funções reais dadas por $f(x) = \left|\dfrac{\text{sen}\, 2x}{\cos x}\right|$ e $g(x) = 2$, cada uma definida no seu domínio mais amplo possível.

Analise as afirmações abaixo.

I) O conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ contém infinitos elementos.

II) No intervalo $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$, a função $f$ é crescente.

III) O período da função $f$ é $p = \pi$.

Sobre as afirmações é correto afirmar que

a) apenas III é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) todas são falsas.
d) apenas II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$f(x) = \left|\dfrac{\text{sen}\, 2x}{\cos x}\right| = \left|\dfrac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{\cos x}\right| = 2|\text{sen}\, x|$, com $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

I) FALSA

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |2\,\text{sen}\, x| = 2 \Leftrightarrow |\text{sen}\, x| = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Mas essas soluções não pertencem ao domínio de $f$, logo $S = \varnothing$.

II) FALSA

Contra-exemplo: $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \left|2\,\text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right| = \sqrt{2}$ e $f(\pi) = |2\,\text{sen}\,\pi| = 0$, ou seja, $\dfrac{3\pi}{4} < \pi$ e $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) > f(0)$.

III) VERDADEIRA

O período de $f(x) = |2\,\text{sen}\, x|$ é $p = \pi$.

A seguir encontra-se um esboço do gráfico das duas funções, onde podem ser observados os pontos de descontinuidade de $f$, o seu comportamento no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ e o seu período.

5) Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre um tubo cilíndrico.
A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos $3$ vértices livres do quadrado foi construído um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ metro.

2ª) Em cada um dos vértices livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado $\frac{1}{4}$ de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior.
A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.

Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

b) $\left(\frac{3}{8}\right)^8$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A cada nova etapa a quantidade de quadrados construída triplica e a sua área fica reduzida em $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Logo, a soma das áreas dos quadrados de uma etapa é igual a $\frac{3}{4}$ da soma das áreas dos quadrados da etapa anterior.
Portanto, a soma das áreas dos quadrados construídos em cada etapa constitui uma progressão geométrica de razão $q = \frac{3}{4}$ e primeiro termo igual à soma das áreas dos quadrados construídos na primeira etapa, ou seja, $a_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. Assim, a soma das áreas dos quadrados construídos na n-ésima etapa é igual a $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Logo, a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a $a_7 = \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

6) A circunferência $\lambda$ é tangente à reta $r: y = \frac{3}{4}x$ e também é tangente ao eixo das abscissas no ponto de abscissa $6$. Dentre as equações abaixo, a que representa uma parábola que contém a origem do plano cartesiano e o centro de $\lambda$ é

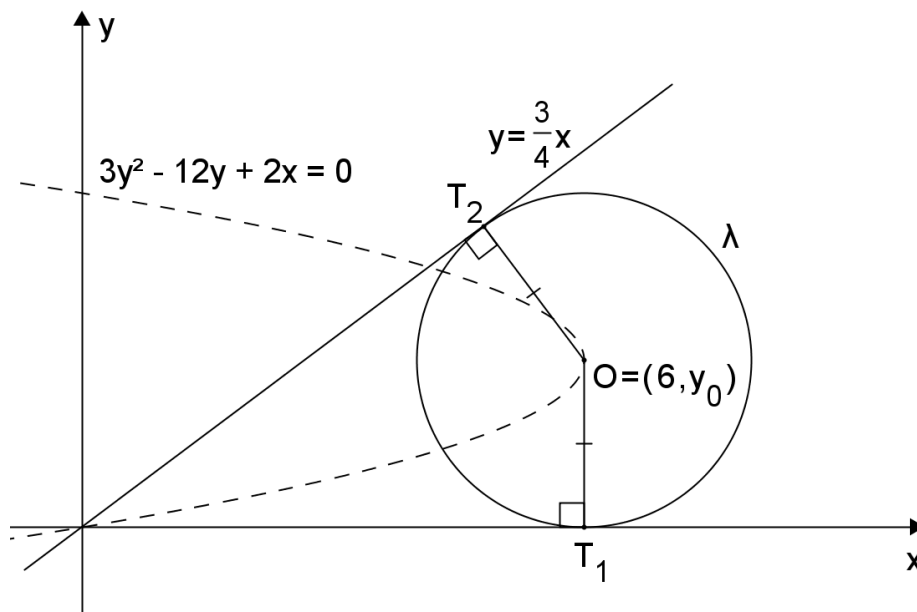
a) $12(y - x) + x^2 = 0$

b) $3y^2 - 12y + 2x = 0$

c) $2y^2 - 3x = 0$

d) $12y - x^2 = 0$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Como a circunferência $\lambda$ é tangente à reta $r: y=\frac{3}{4}x$ e ao eixo das abscissas no ponto de abscissa $6$, então o centro da circunferência é $O=(6,|y_0|)$ e $OT_1=OT_2=|y_0|$, ou seja, a distância de $O$ à reta $r: y=\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x-4y=0$ é $|y_o|$. Assim, temos:

$$\frac{|3\cdot 6-4\cdot y_0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|y_0| \Leftrightarrow |18-4y_0|=5|y_0| \Leftrightarrow y_0=-18 \ \vee \ y_0=2$$

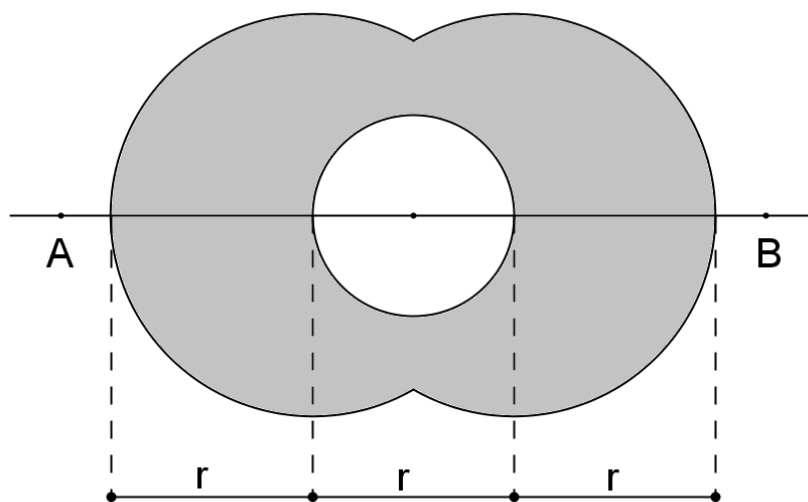
Note que a solução $y_0=-18$ também satisfaz às condições do enunciado, mas vamos adotar $y_0=2$, que resulta em uma circunferência no primeiro quadrante (representada na figura).

Devemos identificar dentre as opções a equação que representa uma parábola que contém os pontos $(0,0)$ e $(6,2)$. Todas as equações representam parábolas que passam no ponto $(0,0)$, entretanto, apenas $3y^2-12y+2x=0$ passa pelo ponto $O(6,2)$.

A título de ilustração, vamos analisar a parábola $3y^2-12y+2x=0$:

$$3y^2-12y+2x=0 \Leftrightarrow 3(y^2-4y+4)=-2x+12 \Leftrightarrow (y-2)^2=-\frac{2}{3}(x-6)$$

Portanto, trata-se de uma parábola de vértice no ponto $(6,2)$, eixo de simetria horizontal $y=2$ e voltada para a esquerda.

7) Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta $AB$ e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.

A expressão que fornece o valor da área sombreada é

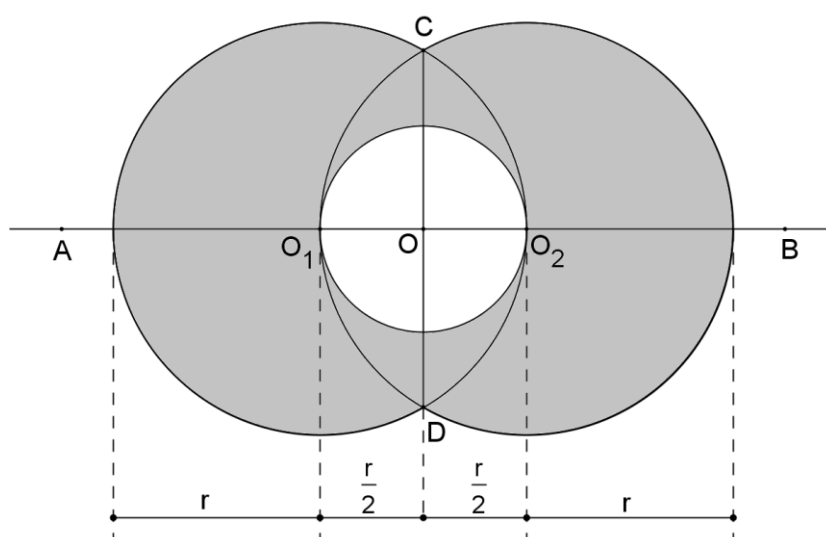
a) $\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9} r^2$

b) $\frac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12} r^2$

c) $\frac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9} r^2$

d) $\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} r^2$

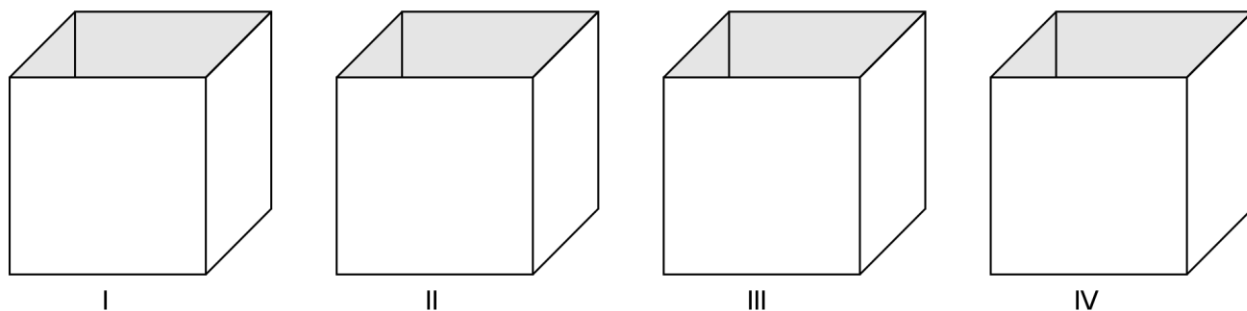
RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Sejam $O$, $O_1$ e $O_2$ os centros da circunferência menor de raio $\frac{r}{2}$ e das duas circunferências maiores de raio $r$, respectivamente.

Como $O_1O = O_2O = \frac{r}{2}$, a corda $CD$ é o lado do triângulo equilátero inscrito nas circunferências maiores e determina segmentos circulares de $120^\circ$.

Dessa forma, a área sombreada é igual à área de duas circunferências de raio $r$ menos a área de dois segmentos circulares de $120^\circ$ e raio $r$ e menos a área de uma circunferência de raio $\frac{r}{2}$.

$$S = 2 \cdot \pi r^2 - 2 \cdot \left( \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r \cdot r}{2} \operatorname{sen} 120^\circ \right) - \pi \cdot \left( \frac{r}{2} \right)^2 = \left( 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 = \frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} r^2$$

8) Sr. José deseja guardar $4$ bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em $4$ caixas numeradas:

O número de maneiras de Sr. José guardar todas as $4$ bolas de forma que uma mesma caixa **NÃO** contenha mais do que duas bolas, é igual a

a) 24
b) 36
c) 144
d) 204

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Como uma mesma caixa não pode conter mais do que duas bolas, então quantidades de bolas por caixa devem ser $\{2,2,0,0\}$, $\{2,1,1,0\}$ ou $\{1,1,1,1\}$ em alguma ordem.

1º caso: $\{2,2,0,0\}$

O número de maneiras de escolher as caixas que receberão duas bolas é $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

O número de maneiras de escolher as bolas que serão guardadas em cada caixa é $C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 1 = 6$

.

Assim, o número de maneiras de distribuir as bolas nas caixas nesse caso é $6 \cdot 6 = 36$.

2º caso: $\{2,1,1,0\}$

O número de maneiras de escolher a caixa que receberá duas bolas é $4$ e o número de maneiras de escolher as bolas que serão guardadas nessa caixa é $C_4^2 = 6$.

O número de maneiras de escolher as duas caixas que receberão uma bola é $C_3^2 = 3$ e o número de maneiras de escolher as bolas que irão nessas caixas dentre as duas bolas restantes é $2 \cdot 1 = 2$.
Assim, o número de maneiras de distribuir as bolas nas caixas nesse caso é $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 144$.
3º caso: $\{1,1,1,1\}$
O número de maneiras de guardar uma bola em cada caixa é igual a $P_4 = 4! = 24$.
Portanto, o número total de maneiras de guardar as bolas respeitadas as condições do enunciado é $36 + 144 + 24 = 204$.

9) Um tanque com capacidade de $300$ litros de água possui duas torneiras: I e II.
A torneira I despeja água no tanque a uma vazão de $2\,\ell$ por minuto. Já a torneira II retira água do tanque a uma vazão de $\frac{1}{2}\,\ell$ por minuto.
Às $8\text{ h}$ de certo dia, com o tanque vazio, a torneira I foi aberta e, após $15$ minutos foi fechada.
Às $9\text{ h}$ e $30\text{ min}$ as duas torneiras foram abertas, e assim permaneceram até $11\text{ h}$ e $30\text{ min}$.
Neste horário a torneira II é fechada, mas a torneira I permanece aberta até o momento em que a água atinge a capacidade do tanque.
Este momento ocorre às
a) $12\text{ h}$ e $10\text{ min}$
b) $12\text{ h}$ e $15\text{ min}$
c) $12\text{ h}$ e $20\text{ min}$
d) $12\text{ h}$ e $25\text{ min}$

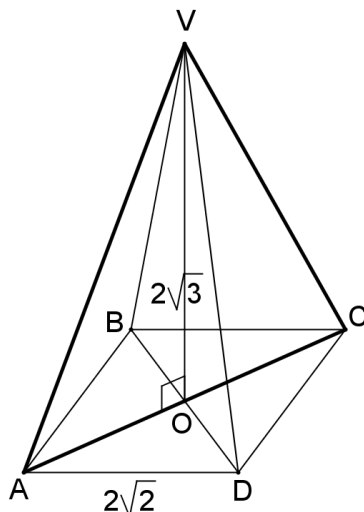
RESPOSTA: b

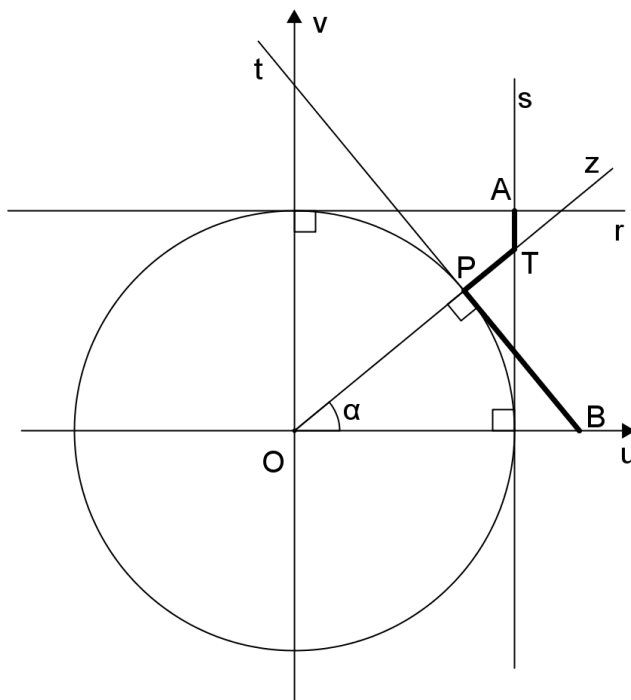
RESOLUÇÃO:
Inicialmente, a torneira I ficou aberta durante $15\text{ min}$, despejando no tanque um volume de $2 \cdot 15 = 30\,\ell$.
Depois as duas torneiras ficaram abertas juntas durante $2\text{ h} = 120\text{ min}$, despejando no tanque um volume de $(2 - 0,5) \cdot 120 = 180\,\ell$.
Dessa forma, às $11\text{ h}$ e $30\text{ min}$, havia $30 + 180 = 210\,\ell$ de água no tanque.
Para que a torneira I aberta sozinha encha o tanque, serão necessários $\frac{300 - 210}{2} = \frac{90}{2} = 45\text{ min}$.
Assim, a torneira I deve permanecer aberta até as $12\text{ h}$ e $15\text{ min}$.

10) Considere uma pirâmide regular $ABCDV$ de base $ABCD$. Sendo $2\sqrt{2}\text{ cm}$ a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}\text{ cm}$ a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de $A$ à aresta lateral $VC$ é
a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $4$

d) $\sqrt{3}$

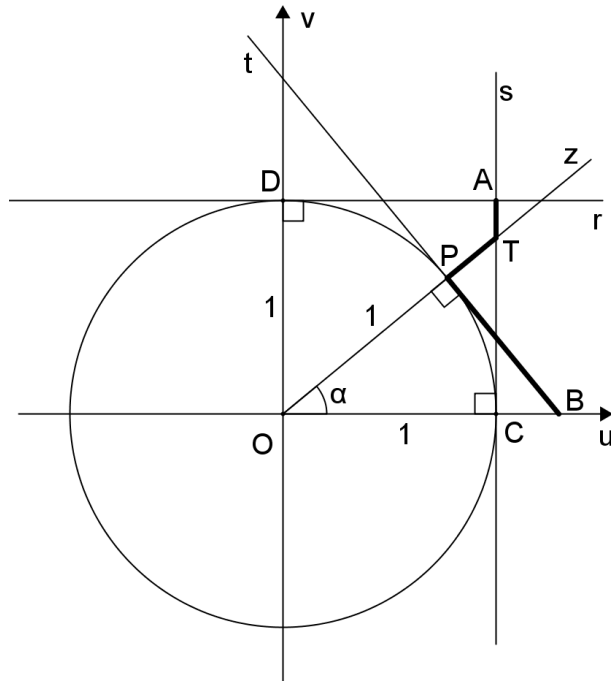
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

A base da pirâmide regular $ABCDV$ é o quadrado $ABCD$. Se a aresta da base é $2\sqrt{2}$, então a diagonal da base é $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$.
O triângulo $AOV$ é retângulo de catetos $AO=2$ e $OV=2\sqrt{3}$, então a sua hipotenusa é $AV=4$.
Como se trata de uma pirâmide regular, temos $AV=BV=CV=DV=4$.
No triângulo $AVC$, tem-se $AC=CV=AV=4$, portanto o triângulo $AVC$ é equilátero e a distância de $A$ à aresta lateral $VC$ é igual à altura de um triângulo equilátero de lado $4$, ou seja, $\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ cm.

11) No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas $r$, $s$, $t$ e $z$.

Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, $AT$, $TP$ e $PB$, pode ser calculado, como função de $\alpha$, por

a) $\sec\alpha$
b) $\text{cossec}\,\alpha$
c) $\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha$
d) $\text{cossec}\,\alpha + \sec\alpha$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, lembremos que o ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio 1. Logo, na figura a seguir, temos $OC = OP = OD = 1$.

No triângulo retângulo $OPB$, temos $\text{tg}\,\alpha = \frac{PB}{OP} = \frac{PB}{1} \Leftrightarrow PB = \text{tg}\,\alpha$.

No triângulo retângulo $OCT$, temos $\sec\alpha = \frac{OT}{OC} = \frac{OP+PT}{OC} = \frac{1+PT}{1} \Leftrightarrow PT = \sec\alpha - 1$.

Ainda no triângulo retângulo $OCT$, temos $\text{tg}\,\alpha = \frac{CT}{OC} = \frac{AC-AT}{OC} = \frac{1-AT}{1} \Leftrightarrow AT = 1-\text{tg}\,\alpha$.

Portanto, a soma pedida é $AT+TP+PB = (1-\text{tg}\,\alpha)+(\sec\alpha-1)+\text{tg}\,\alpha = \sec\alpha$.

12) O sistema linear nas incógnitas $x$, $y$ e $z$ abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} (\text{sen}\,a)x + y - z = 0 \\ x - (\text{sen}\,a)y + z = 1 \\ x + y = \cos a \end{cases}$$

Sobre o parâmetro $a$, $a \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que

a) $a = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $a = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $a = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Se o sistema possui infinitas soluções, então o determinante da sua matriz incompleta é nulo.

$$\det A = \begin{vmatrix} \text{sen}\, a & 1 & -1 \\ 1 & -\text{sen}\, a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 - \text{sen}\, a - \text{sen}\, a = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, a = 0$$

Fazendo $\text{sen}\, a = 0$ no sistema original, o sistema resultante é

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ y - z = 1 - \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1 - \cos a \end{cases}$$

Para que o sistema tenha infinitas soluções a última equação deve ser da forma $0 = 0$, o que implica $\cos a = 1$.

Portanto, para que o sistema tenha infinitas soluções, duas condições devem ser satisfeitas $\text{sen}\, a = 0$ e $\cos a = 1$, então $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

13) Seja $f$ uma função quadrática tal que:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- tem gráfico interceptando o gráfico da função $g$, dada por $g(x) = 2$, num único ponto cuja abscissa é $2$
- seu gráfico possui o ponto $Q$, simétrico do ponto $R(0,-3)$ em relação à origem do sistema cartesiano.

Seja $h$ uma função afim cujo gráfico intercepta o gráfico de $f$ no eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e no ponto de menor ordenada de $f$.

Assim sendo, o conjunto solução da inequação $\dfrac{[f(x)]^3 \cdot [g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}} \geq 0$ contém o conjunto

a) $[0,8]$
b) $[1,7]$
c) $[2,6]$
d) $[3,5]$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Como $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima e não possui raízes reais.

O gráfico de $f$ intercepta o gráfico de $g(x) = 2$, num único ponto cuja abscissa é $2$. Como $g(x) = 2$ é uma reta horizontal, então o ponto $(2,2)$ é o vértice da parábola.

O ponto simétrico de $R(0,-3)$ em relação à origem do sistema cartesiano é $Q(0,3)$. Portanto, $f(0) = 3$ é o ponto onde o gráfico de $f$ intercepta o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$.

O ponto de menor ordenada de $f$ é seu vértice $(2,2)$ e a interseção com o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ é $Q(0,3)$. Portanto, a função afim $h$ passa por esses dois pontos e será dada por $h(x)=\frac{2-3}{2-0}x+3 \Leftrightarrow h(x)=-\frac{1}{2}x+3$.
Logo, a função $h(x)$ se anula para $x=6$, sendo positiva antes desse valor e negativa depois.
Como $f(x)$ e $g(x)$ são sempre positivos, a inequação $\frac{[f(x)]^3\cdot[g(x)]^{10}}{[h(x)]^{15}}\geq 0$ pode ser reduzida a $[h(x)]^{15}>0 \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow x<6$. Logo, $S=]-\infty,6[$ que contém o conjunto $[3,5]$.

14) Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de $2013$, a população de pássaros da espécie $A$ era $12$ vezes a população de pássaros da espécie $B$.
Sabe-se que a população de pássaros da espécie $A$ cresce a uma taxa de $5\%$ ao ano, enquanto que a população de pássaros da espécie $B$ cresce a uma taxa de $20\%$ ao ano.
Com base nesses dados, é correto afirmar que, essas duas populações de pássaros serão iguais
(Considere: $\log 7=0,85$; $\log 6=0,78$; $\log 2=0,3$)
a) no 1º semestre do ano de $2034$.
b) no 2º semestre do ano de $2034$.
c) no 1º semestre do ano de $2035$.
d) no 2º semestre do ano de $2035$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Sejam $12k$ e $k$ a população de pássaros das espécies $A$ e $B$ no ano de $2013$. No ano $(2013+n)$, a população de pássaros da espécie $A$ é dada por $P_A(n)=12k\cdot(1+5\%)^n=12k\cdot 1,05^n$ e a população de pássaros da espécie $B$ é dada por $P_B(n)=k\cdot(1+20\%)^n=k\cdot 1,2^n$.
Para que as duas populações sejam iguais, devemos ter:

$$12k\cdot 1,05^n=k\cdot 1,2^n \Leftrightarrow \left(\frac{1,2}{1,05}\right)^n=12 \Leftrightarrow \left(\frac{120}{105}\right)^n=12 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^n=2^2\cdot 3 \Leftrightarrow \log\left(\frac{2^3}{7}\right)^n=\log\left(2^2\cdot 3\right)$$

$$\Leftrightarrow n\left(3\log 2-\log 7\right)=2\log 2+\log 3 \Leftrightarrow n=\frac{2\log 2+\log 3}{3\log 2-\log 7}$$

Vamos calcular $\log 3$ com os valores do enunciado: $\log 3=\log\frac{6}{2}=\log 6-\log 2=0,78-0,3=0,48$.
Assim, temos: $n=\frac{2\log 2+\log 3}{3\log 2-\log 7}=\frac{2\cdot 0,3+0,48}{3\cdot 0,3-0,85}=\frac{1,08}{0,05}=21,6$. Portanto, a igualdade ocorrerá em $2013+21,6=2034,6$, ou seja, no 2º semestre de $2034$.

15) Considere no plano complexo, o conjunto dos números $z=x+yi$; $\{x,y\}\subset\mathbb{R}$ e $i^2=-1$ que satisfazem a condição $|z|\geq|2z+1|$.
É **FALSO** afirmar que

a) este conjunto pode ser representado por um círculo de raio igual a $\frac{1}{3}$.

b) $z = -1$ é o elemento de maior módulo, neste conjunto.

c) $z = -\frac{1}{3}$ é o elemento de maior argumento, neste conjunto.

d) não existe $z$, neste conjunto, que seja imaginário puro.

RESPOSTA: c

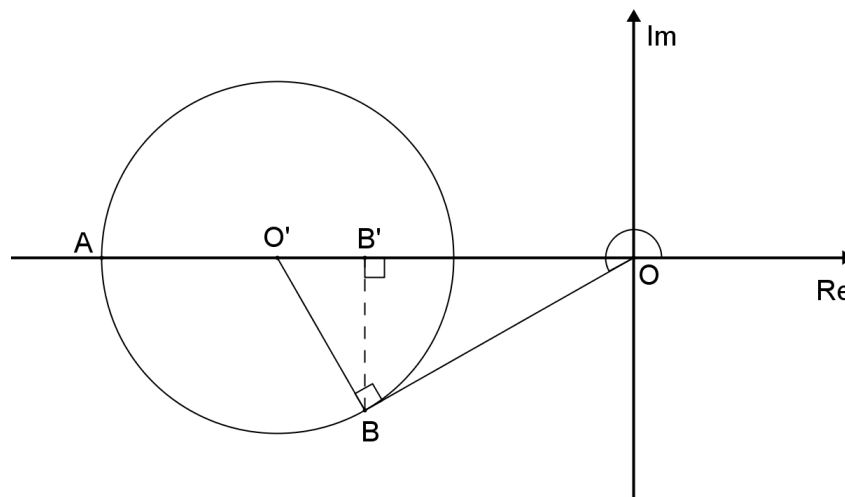
RESOLUÇÃO:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|2z+1| = |(2x+1)+2yi| = \sqrt{(2x+1)^2 + (2y)^2}$

$|z| \geq |2z+1| \Leftrightarrow |z|^2 \geq |2z+1|^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 3y^2 + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} x + \frac{4}{9} + y^2 \leq -\frac{1}{3} + \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{9}$

Portanto, esse conjunto representa um círculo de centro $z = -\frac{2}{3}$ e raio $\frac{1}{3}$, representado na figura seguinte.

a) VERDADEIRA

b) VERDADEIRA: o número complexo de maior módulo é o afixo do ponto $A(-1, 0)$.

c) FALSA: o número complexo de maior argumento é o afixo do ponto $B$ e pode ser calculado como segue

$|O'B| = \frac{1}{3}$; $|O'O| = \frac{2}{3} \Rightarrow |OB|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} \Leftrightarrow |OB| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

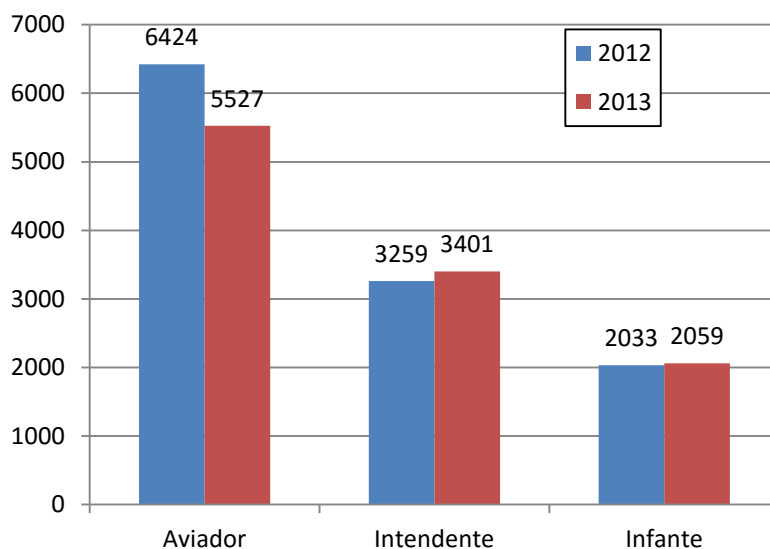
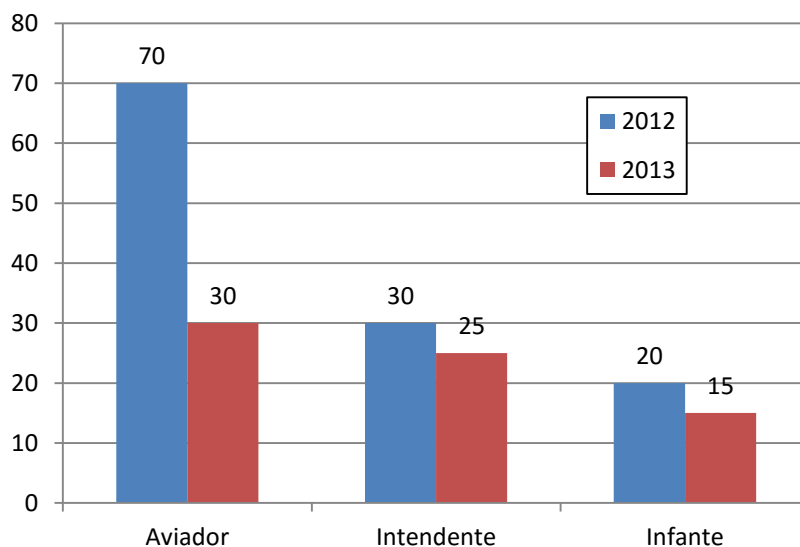
$\frac{2}{3} \cdot |BB'| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow |BB'| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (hipotenusa vezes altura é igual ao produto dos catetos)

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot |OB'| \Leftrightarrow |OB'| = \frac{1}{2}$ (quadrado do cateto é o produto da hipotenusa pela sua projeção)

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$ (complexo de maior argumento).

d) VERDADEIRA: o círculo que representa o conjunto não tem interseção com o eixo imaginário, logo o conjunto não tem nenhum elemento que seja imaginário puro.

16) Os gráficos a seguir apresentam os números de candidatos e de vagas para os concursos da AFA 2012 e 2013.

**CANDIDATOS**

**VAGAS**

Entenda-se por concorrência a razão entre o número de candidatos e número de vagas.
Do concurso de 2012 para o concurso de 2013, pode-se afirmar corretamente que
a) para a infantaria, a taxa de crescimento do número de candidatos foi positiva, porém a concorrência diminuiu.
b) para o quadro de intendência, tanto a procura quanto a concorrência diminuíram.

c) apesar da taxa de crescimento do número de candidatos ao quadro de aviadores ser negativa, a concorrência aumentou.
d) a concorrência dobrou.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
a) INCORRETA
Para a Infantaria, a concorrência em 2012 foi $\frac{2033}{20} = 101,65$ e em 2013 foi $\frac{2059}{15} \approx 137,3$. Portanto, a concorrência aumentou.
b) INCORRETA
Para a Intendência, a procura aumentou e a concorrência em 2012 foi $\frac{3259}{30} \approx 108,7$ e em 2013 foi $\frac{3401}{25} = 136,04$, portanto, a concorrência também aumentou.
c) CORRETA
Para o quadro de Aviadores, a procura diminuiu, mas a concorrência em 2012 foi $\frac{6424}{70} \approx 91,8$ e em 2013 foi $\frac{5527}{30} \approx 184.2$, ou seja, a concorrência aumentou.
d) INCORRETA
A concorrência total em 2012 foi $\frac{6424+3259+2033}{70+30+20} \approx 97,3$ e em 2013 foi $\frac{5527+3401+2059}{30+25+15} \approx 157$.
Portanto, a concorrência aumentou, mas não dobrou.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2012/2013

1) Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$A = (\mathbb{N} \cup I) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$

$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$

$D = (\mathbb{N} \cup I) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos $A$, $B$ e $D$, nesta ordem, é

a) $-3$; $0,5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}$; $\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10}$; $-5$ e $2$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $3$ e $2,\overline{31}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$A = (\mathbb{N} \cup I) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) = (\mathbb{N} \cup I) - \mathbb{Z} = I \Rightarrow -3 \notin A; \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \in A; -\sqrt{10} \in A; \frac{\sqrt{3}}{2} \in A$

$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}_-^* \Rightarrow 0,5 \in B; \sqrt{10} \notin B; -5 \notin B; 3 \in B$

$D = (\mathbb{N} \cup I) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N}) = (\mathbb{N} \cup I) \cup (\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{N}}) = (\mathbb{N} \cup I \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N} \cup I \cup \overline{\mathbb{N}}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{5}{2} \in D; \sqrt{5} \in D; 2 \in D; 2,\overline{31} \in D$

Portanto, a alternativa (d) apresenta números que pertencem a $A$, $B$ e $D$, nessa ordem.

2) Considerando os números complexos $z_1$ e $z_2$, tais que:

- $z_1$ é a raiz cúbica de $8i$ que tem afixo no segundo quadrante
- $z_2$ é a raiz da equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e $\text{Im}(z_2) > 0$

Pode-se afirmar que $|z_1 + z_2|$ é igual a

a) $2\sqrt{3}$

b) $3 + \sqrt{3}$

c) $1 + 2\sqrt{2}$

d) $2 + 2\sqrt{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$z^3 = 8i = 8\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 2\,\text{cis}\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k=0,1,2 \Rightarrow z = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6} \vee z = 2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6} \vee z = 2\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$

Como $z_1$ tem afixo no $2^\circ$, então $z_1 = 2\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$.

$x^4 + x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \ \vee\ x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 3 \ \vee\ x = \pm 2i$

Como $\text{Im}(z_2) > 0$, então $z_2 = 2i$.

$|z_1 + z_2| = |(-\sqrt{3}+i) + (2i)| = |-\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3) A sequência $\left(x, 6, y, y+\frac{8}{3}\right)$ é tal que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética, e os três últimos formam uma progressão geométrica. Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é:

a) $\frac{92}{3}$
b) $\frac{89}{3}$
c) $\frac{86}{3}$
d) $\frac{83}{3}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$\text{PA}(x, 6, y) \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = 6 \Leftrightarrow x + y = 12$

$\text{PG}\left(6, y, y+\frac{8}{3}\right) \Rightarrow y^2 = 6\cdot\left(y+\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow y^2 - 6y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \ \vee\ y = 8$

Como a sequência é crescente, então $y > 6$, donde se conclui que $y = 8$ e $x = 4$.

Portanto, a soma dos termos da sequência é $x + 6 + y + y + \frac{8}{3} = 4 + 6 + 8 + 8 + \frac{8}{3} = \frac{86}{3}$.

4) As raízes da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$ formam uma progressão geométrica. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, então $\frac{a}{b}$ é igual a

a) $\frac{2}{3}$
b) 3

c) $-\frac{3}{2}$
d) $-\frac{1}{3}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Como as três raízes da equação estão em P.G. elas podem ser representadas na forma $\frac{k}{q}, k, kq$.
Aplicando as relações de Girard, temos:

$$\sigma_1 = \frac{k}{q} + k + kq = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2k\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) \ (*)$$

$$\sigma_2 = \frac{k}{q} \cdot k + \frac{k}{q} \cdot kq + k \cdot kq = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2k^2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) \ (**)$$

$$\sigma_3 = \frac{k}{q} \cdot k \cdot kq = -\frac{54}{2} \Leftrightarrow k^3 = -27 \Leftrightarrow k = -3$$

Dividindo (*) por (**), temos: $\frac{a}{b} = \frac{2k\left(\frac{1}{q}+1+q\right)}{2k^2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)} = \frac{1}{k} = -\frac{1}{3}$.

Note que na resolução de $k^3 = -27$ teríamos duas possíveis raízes complexas, além da raiz $-3$. Entretanto, como $\frac{a}{b} = \frac{1}{k}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então $k \in \mathbb{R}$.

5) Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados 10 soldados, dentre eles o soldado A e o soldado B, de tal maneira que fiquem 4 soldados na barraca I, 3 na barraca II e 3 na barraca III. Se o soldado A deve ficar na barraca I e o soldado B **NÃO** deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a
a) 560
b) 1120
c) 1680
d) 2240

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Como o soldado A deve ficar na barraca I. O problema se reduz a analisar a distribuição de 9 soldados com 3 em cada uma das barracas, sendo que B não pode ficar na barraca III.

Se colocarmos o soldado $B$ na barraca I, teremos $C_8^2$ possibilidades os outros dois soldados da barraca I, $C_6^3$ para os soldados da barraca II e $C_3^3$ para os soldados da barraca III. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 1 = 28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$.

Se colocarmos o soldado $B$ na barraca II, teremos $C_8^2$ possibilidades os outros dois soldados da barraca II, $C_6^3$ para os soldados da barraca I e $C_3^3$ para os soldados da barraca III. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 1 = 28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$.

Portanto, pelo princípio aditivo, o número de maneiras de distribuir os soldados nas três barracas é $560 + 560 = 1120$.

6) Um dado cúbico tem três de suas faces numeradas com "0", duas com "1" e uma com "2". Um outro dado, tetraédrico, tem duas de suas faces numeradas com "0", uma com "1" e uma com "2". Sabe-se que os dados não são viciados.
Se ambos são lançados simultaneamente, a probabilidade de a soma do valor ocorrido na face superior do dado cúbico com o valor ocorrido na face voltada para baixo no tetraédrico ser igual a 3 é de
a) 12,5%
b) 16,6%
c) 37,5%
d) 67,5%

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
A soma três nos valores dos dados pode ocorrer de duas maneiras distintas:
1ª) O valor na face superior do dado cúbico é "1", o que ocorre com probabilidade $P(\text{cubo} = \text{"1"}) = \frac{2}{6}$, e o valor na face voltada para baixo do dado tetraédrico é "2", o que ocorre com probabilidade $P(\text{tetraedro} = \text{"2"}) = \frac{1}{4}$. Como os dois eventos são independentes, a probabilidade de ambos ocorrerem simultaneamente é $P(A) = P((\text{cubo} = \text{"1"}) \cap (\text{tetraedro} = \text{"2"})) = P(\text{cubo} = \text{"1"}) \cdot P(\text{tetraedro} = \text{"2"}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$.

2ª) O valor na face superior do dado cúbico é "2", o que ocorre com probabilidade $P(\text{cubo} = \text{"2"}) = \frac{1}{6}$, e o valor na face voltada para baixo do dado tetraédrico é "1", o que ocorre com probabilidade $P(\text{tetraedro} = \text{"1"}) = \frac{1}{4}$. Como os dois eventos são independentes, a probabilidade de ambos ocorrerem simultaneamente é $P(B) = P((\text{cubo} = \text{"2"}) \cap (\text{tetraedro} = \text{"1"})) = P(\text{cubo} = \text{"2"}) \cdot P(\text{tetraedro} = \text{"1"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

As duas situações acima representam eventos mutuamente exclusivos, portanto a probabilidade de ocorrer um dos eventos acima é $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 12,5\%$.

7) Considere as matrizes $A$ e $B$, inversíveis e de ordem $n$, bem como a matriz identidade $I$. Sabendo que $\det(A) = 5$ e $\det(I \cdot B^{-1} \cdot A) = \frac{1}{3}$, então o $\det\left[3 \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right]$ é igual a

a) $5 \cdot 3^n$

b) $\frac{3^{n-1}}{5^2}$

c) $\frac{3^n}{15}$

d) $3^{n-1}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O teorema de Binet estabelece que o determinante do produto de matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos seus determinantes. Assim, temos:

$$\det(I \cdot B^{-1} \cdot A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \det(I) \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot 5 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \det(B) = 15$$

onde usamos também que o determinante da matriz identidade é igual a $1$ e que o determinante da matriz inversa é igual ao inverso do determinante da matriz.

A matriz $(B^{-1} \cdot A^{-1})^t$ é uma matriz de ordem $n$, portanto

$$\det\left[3 \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right] = 3^n \cdot \det\left[(B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right].$$

O determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz, logo

$$\det\left[3 \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right] = 3^n \cdot \det\left[(B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right] = 3^n \cdot \det(B^{-1} \cdot A^{-1}).$$

Novamente, pelo teorema de Binet, temos:

$$\det\left[3 \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right] = 3^n \cdot \det(B^{-1} \cdot A^{-1}) = 3^n \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(A^{-1}).$$

Lembrando que o determinante da matriz inversa é igual ao inverso do determinante da matriz, temos:

$$\det\left[3 \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right] = 3^n \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(A^{-1}) = 3^n \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot \frac{1}{\det(A)} = 3^n \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{3^{n-1}}{5^2}}.$$

8) Irão participar do EPEMM, Encontro Pedagógico do Ensino Médio Militar, um Congresso de Professores das Escolas Militares, $87$ professores das disciplinas de Matemática, Física e Química. Sabe-se que cada professor leciona apenas uma dessas três disciplinas e que o número de professores de Física é o triplo do número de professores de Química.
Pode-se afirmar que:
a) se o número de professores de Química for $16$, os professores de Matemática serão a metade dos de Física.

b) o menor número possível de professores de Química é igual a $3$.
c) o número de professores de Química será no máximo 21.
d) o número de professores de Química será maior do que o de Matemática, se o de Química for em quantidade maior ou igual a $17$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Sejam $M$, $F$ e $Q$ as quantidades de professores de Matemática, Física e Química, respectivamente, que irão participar do Congresso. Assim, temos:

$$\begin{cases} M+F+Q=87 \\ F=3Q \end{cases}$$

$\Rightarrow M+3Q+Q=87 \Leftrightarrow M+4Q=87$

Análise das alternativas:
a) FALSA

$Q=16 \Rightarrow M+4\cdot 16=87 \Leftrightarrow M=23$ e $F=3\cdot 16=48 \Rightarrow M=23 \neq 24=\dfrac{F}{2}$

b) FALSA
Contra-exemplo: $Q=1 \Rightarrow F=3\cdot 1=3 \Rightarrow M=87-4\cdot 1=83$
c) VERDADEIRA
$M+4Q=87 \Rightarrow 4Q \leq 87 \Leftrightarrow Q \leq 21,75 \Rightarrow Q_{MAX}=21$
d) FALSA
$M+4Q=87 \wedge Q>M \Rightarrow Q+4Q>87 \Leftrightarrow 5Q>87 \Leftrightarrow Q>17,4 \Rightarrow Q \geq 18$

9) Sejam $a$ e $b$ dois números reais positivos. As retas $r$ e $s$ se interceptam no ponto $(a,b)$. Se $\left(\dfrac{a}{2},0\right) \in r$ e $\left(0,\dfrac{b}{2}\right) \in s$, então uma equação para a reta $t$, que passa por $(0,0)$ e tem a tangente do ângulo agudo formado entre $r$ e $s$ como coeficiente angular, é
a) $3abx+\left(2a^2-b^2\right)y=0$
b) $3bx-b\left(a^2+b^2\right)y=0$
c) $3ax-a\left(a^2+b^2\right)y=0$
d) $3abx-2\left(a^2+b^2\right)y=0$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A reta $r$ passa pelos pontos $(a,b)$ e $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$, logo seu coeficiente angular é $m_r=\dfrac{b-0}{a-\dfrac{a}{2}}=\dfrac{2b}{a}$.

A reta $s$ passa pelos pontos $(a,b)$ e $\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$, logo seu coeficiente angular é $m_s=\dfrac{b-\dfrac{b}{2}}{a-0}=\dfrac{b}{2a}$.

A tangente do ângulo entre as retas $r$ e $s$ é dada por

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|=\left|\frac{\frac{2b}{a}-\frac{b}{2a}}{1+\frac{2b}{a}\cdot\frac{b}{2a}}\right|=\left|\frac{\frac{3b}{2a}}{\frac{2a^2+2b^2}{2a^2}}\right|=\left|\frac{3b}{2a\left(a^2+b^2\right)}\right|=\frac{3ab}{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

Portanto, a equação da reta $t$ que passa pelo ponto $(0,0)$ e tem coeficiente angular $\operatorname{tg}\theta=\frac{3ab}{2\left(a^2+b^2\right)}$ é $y=\frac{3ab}{2\left(a^2+b^2\right)}\cdot x\Leftrightarrow 3abx-2\left(a^2+b^2\right)y=0$.

10) Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse de equação $x^2+9y^2-8x-54y+88=0$ é correto afirmar que

a) tem raio igual a $1$.
b) tangencia o eixo das abscissas.
c) é secante ao eixo das ordenadas.
d) intercepta a reta de equação $4x-y=0$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Analisando a equação da elipse, temos:

$$x^2+9y^2-8x-54y+88=0\Leftrightarrow x^2-2\cdot4\cdot x+4^2+9\cdot\left(y^2-2\cdot3\cdot y+3^2\right)=-88+4^2+9\cdot3^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-4)^2+9(y-3)^2=9\Leftrightarrow\frac{(x-4)^2}{3^2}+\frac{(y-3)}{1^2}=1$$

Portanto, trata-se de uma elipse com eixo focal horizontal, centro em $(4,3)$ e semi eixo maior $a=3$.
A circunferência de menor raio possível que circunscreve essa elipse tem centro em $(4,3)$ e diâmetro coincidente com o eixo maior da elipse e, portanto, seu raio é $3$. A equação da circunferência é dada por $(x-4)^2+(y-3)^2=3^2$. Como a ordenada do centro da circunferência é igual ao seu raio, a circunferência tangencia o eixo das abscissas.
A elipse e a circunferência estão representadas na figura a seguir:

11) Dois corredores partem de um ponto ao mesmo tempo e se deslocam da seguinte forma: o primeiro é tal, que sua velocidade $y_1$ é dada em função da distância $x$ por ele percorrida através de

$$y_1 = \begin{cases} 4\,, \text{ se } x \le 200 \\ \dfrac{n}{200}x - \dfrac{n^2+n-8}{2}\,, \text{ se } 200n < x \le 200(n+1) \end{cases}$$

em que $n$ varia no conjunto dos números naturais não nulos.
O segundo é tal que sua velocidade $y_2$ é dada em função da distância $x$ por ele percorrida através de

$$y_2 = \frac{x}{100} + 4\,.$$

Tais velocidades são marcadas em $\text{km/h}$, e as distâncias, em metros.
Assim sendo, ambos estarão à mesma velocidade após terem percorrido
a) 800 m
b) 900 m
c) 1000 m
d) 1100 m

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Observe que, após o início, só é possível termos $y_1 = y_2$ para $x > 200$, pois, quando $0 < x \le 200$, temos $y_1 = 4$ e $y_2 > 4$.
Supondo que $y_1 = y_2$, quando $200n < x \le 200(n+1)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{n}{200}x - \frac{n^2+n-8}{2} = \frac{x}{100} + 4 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{200} - \frac{1}{100}\right)x = 4 + \frac{n^2+n-8}{2} \Leftrightarrow \frac{n-2}{200}x = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 200 \cdot \frac{n(n+1)}{2(n-2)}$$

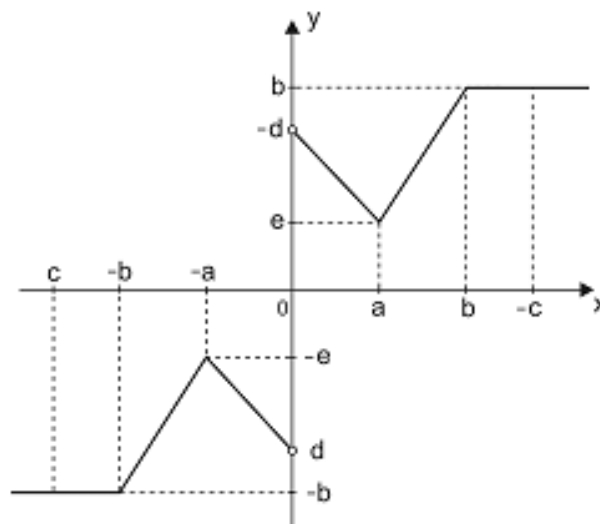
Como $200n < x \le 200(n+1)$, então

$$200n < 200\cdot\frac{n(n+1)}{2(n-2)} \le 200(n+1) \Leftrightarrow n < \frac{n(n+1)}{2(n-2)} \le n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2(n-2)} \le \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow n \le 2(n-2) < n+1 \Leftrightarrow 2(n-2) = n \Leftrightarrow n = 4$$

Portanto, $x = 200\cdot\frac{4\cdot(4+1)}{2\cdot(4-2)} = 1000\text{ m}$.

Observe que $n$ poderia ser obtido testando os primeiros valores. Como $x = 200\cdot\frac{n(n+1)}{2(n-2)}$, então $x > 0 \Leftrightarrow n \ge 3$. Para $n = 3$, temos $600 < x \le 800$ e $x = 200\cdot\frac{3\cdot 4}{2\cdot 1} = 1200$ que são incompatíveis. Já para $n = 4$, temos $800 < x \le 1000$ e $x = 200\cdot\frac{4\cdot 5}{2\cdot 2} = 1000$ que é uma solução válida. Note que, dessa forma, encontramos a solução, mas não provamos que ela é a única possível.

12) O gráfico abaixo descreve uma função $f: A \to B$

Analise as proposições que seguem.
I) $A = \mathbb{R}^*$
II) $f$ é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$.
III) Para infinitos valores de $x \in A$, tem-se $f(x) = -b$.
IV) $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = 2b$
V) $f$ é função par.
VI) $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -d$
São verdadeiras apenas as proposições
a) I, III e IV
b) I, II e VI
c) III, IV e V
d) I, II e IV

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
I) VERDADEIRA
O conjunto $A = \mathbb{R}^*$ é o domínio da função, que é obtido projetando o gráfico sobre o eixo $x$.
II) FALSA
$f$ é sobrejetora se $B = \text{Im}_f = [-b, b] - ]-e, e[ = [-b, -e] \cup [e, b]$
III) VERDADEIRA
$f(x) = -b$, $\forall x \in ]-\infty, -b]$, ou seja, para infinitos valores de $x$.
IV) VERDADEIRA
$f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = b - (-b) + (-b) + b = 2b$
Observe, no gráfico, que $c$ e $d$ são números negativos, enquanto $a$, $b$ e $e$ são números positivos.
V) FALSA
$f$ não é uma função par, pois seu gráfico não é simétrico em relação ao eixo $Oy$.
Observe que o gráfico de $f$ é simétrico em relação à origem, ou seja, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$, o que implica que $f$ é uma função ímpar.
VI) FALSA
Basta observar que existe um $x_0 \in ]a, b[$ e cuja imagem é $-d$, ou seja, $f(x_0) = -d$.

13) O gráfico de uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$, que tem como coordenadas do vértice $(5, 2)$ e passa pelo ponto $(4, 3)$, também passará pelo ponto de coordenadas
a) $(1, 18)$
b) $(0, 26)$
c) $(6, 4)$
d) $(-1, 36)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Considerando a forma canônica do polinômio do 2° grau $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x - x_V)^2 + y_V$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

As coordenadas do vértice são $V(5, 2)$, então $y = f(x) = a(x-5)^2 + 2$.

O polinômio passa pelo ponto $(4, 3)$, então $f(4) = 3 \Leftrightarrow a(4-5)^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Portanto, o polinômio é dado por $y = f(x) = 1 \cdot (x-5)^2 + 2 = x^2 - 10x + 27$, que passa pelo ponto $(1, 18)$.

14) No plano cartesiano, seja $P(a,b)$ o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais $f$ e $g$ definidas por $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. É correto afirmar que

a) $a=\log_2\left(\frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$

b) $a=\log_2(\log_2 a)$

c) $a=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$

d) $a=\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Se $P(a,b)$ é o ponto de interseção de $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, então $f(a)=g(a)=b$. Logo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\log_{\frac{1}{2}} a \Leftrightarrow a=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)=-\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)=-\log_2(-\log_2 a)=-\log_2\left(\log_2 a^{-1}\right)=$$

$$=-\log_2\left(\log_2\frac{1}{a}\right)=\log_2\left(\log_2\frac{1}{a}\right)^{-1}=\log_2\left(\frac{1}{\log_2\frac{1}{a}}\right)$$

15) Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x)=3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y=f(x)$ é a altura da onda, em metros, e $x$ o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.

a) A altura de uma onda nunca atinge $2$ metros.

b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se $2$ minutos.

c) De zero a $4$ minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.

d) As alturas das ondas observadas com $30$, $90$, $150$, ... segundos são sempre iguais.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=3\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\text{sen}\left(2\cdot\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{3}{2}\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\cos(\pi x)}{2}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\cos(\pi x)$$

Como a função $\text{sen}\,x$ tem imagem $[-1,1]$, então a imagem de $f(x)=\frac{3}{2}\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ é $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

O período de $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\cos(\pi x)$ é $\frac{2\pi}{\pi}=2$ (minutos).

a) CORRETA, pois o valor máximo de $f$ é $\frac{3}{2}=1,5$.

b) CORRETA, pois o período de $f$ é $2$.

c) INCORRETA, pois o período de $f$ é $2$ e $f(0)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos(\pi\cdot 0)=0$ não é uma crista.

d) CORRETA. A sequência (em minutos) é a progressão aritmética $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots$. Cada termo da PA multiplicado por $\pi$ resulta um ângulo cujo cosseno é nulo. Portanto, a altura das ondas nesses pontos é sempre $\frac{3}{4}$.

16) Sejam as funções reais $f$, $g$ e $h$ definidas por $f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x}+\frac{\cos x}{\sec x}$, $g(x)=|\sec x|$ e $h(x)=|\text{cossec}\,x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0,2\pi]$.

A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de $f$ e $g$; $f$ e $h$; $g$ e $h$ é(são), respectivamente

a) $0$, $0$ e $4$
b) $3$, $1$ e $4$
c) $2$, $3$ e $4$
d) $0$, $2$ e $3$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

O domínio de $f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x}+\frac{\cos x}{\sec x}$ é tal que $x\neq\frac{k\pi}{2}$, onde $k\in\mathbb{Z}$, que limitado a $[0,2\pi]$ resulta $D_f=[0,2\pi]-\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$.

$$f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x}+\frac{\cos x}{\sec x}=\frac{\text{sen}\,x}{1/\text{sen}\,x}+\frac{\cos x}{1/\cos x}=\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

O domínio de $g(x)=|\sec x|$ é tal que $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, que limitado a $[0,2\pi]$ resulta $D_g=[0,2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$. A imagem da função $g(x)=|\sec x|$ é $\mathrm{Im}_g=[1,+\infty[$ e ela assume o valor 1 em $\{0,\pi,2\pi\}$.

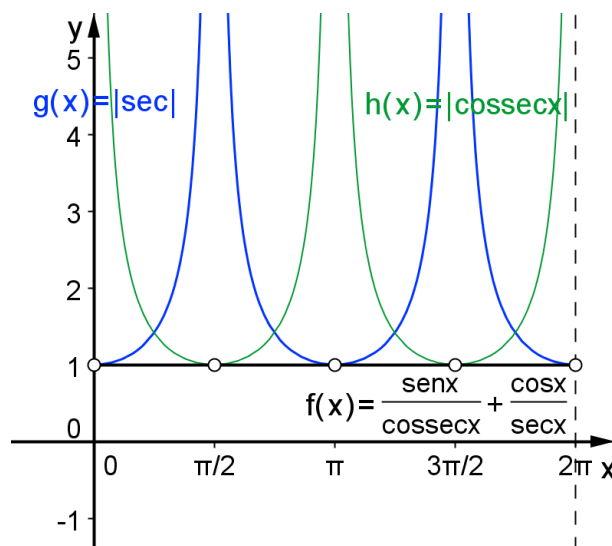
O domínio de $h(x)=|\mathrm{cossec}\, x|$ é tal que $x \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, que limitado a $[0,2\pi]$ resulta $D_h=[0,2\pi]-\{0,\pi,2\pi\}$. A imagem da função $h(x)=|\mathrm{cossec}\, x|$ é $\mathrm{Im}_g=[1,+\infty[$ e ela assume o valor 1 em $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Como os pontos em que $g$ e $h$ assumem o valor 1 não estão no domínio de $f$ não há pontos de interseção entre $f$ e $g$, e nem entre $f$ e $h$.

Os pontos de interseção entre $g$ e $h$ são dados por:

$$|\sec x|=|\mathrm{cossec}\, x| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\cos x}\right|=\left|\frac{1}{\mathrm{sen}\, x}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\right|=1 \Leftrightarrow |\mathrm{tg}\, x|=1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x=\pm 1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Logo, há 4 pontos de interseção entre $g$ e $h$.

Observe o gráfico a seguir representativo das três funções.

17) Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica. Dessa maneira, esse triângulo NÃO é:

a) acutângulo.
b) equilátero.
c) obtusângulo.
d) isósceles.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Sejam a $PA\left(x-r, x, x+r\right)$, com $r \geq 0$, cujos elementos são os ângulos internos do triângulo, e a $PG\left(\frac{y}{q}, y, yq\right)$, com $q \geq 1$, cujos elementos são os lados do triângulo.

A soma dos ângulos internos do triângulo é $180^\circ$, portanto, $(x-r)+x+(x+r)=180^\circ \Leftrightarrow 3x=180^\circ \Leftrightarrow x=60^\circ$.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$y^2=(yq)^2+\left(\frac{y}{q}\right)^2-2\cdot(yq)\cdot\left(\frac{y}{q}\right)\cos 60^\circ \Leftrightarrow 1=q^2+\frac{1}{q^2}-1 \Leftrightarrow q^4-2q^2+1=0 \Leftrightarrow q=1.$$

Portanto, os lados do triângulo são todos iguais, ou seja, o triângulo é equilátero, isósceles e acutângulo, porém não é obtusângulo.

18) Uma pirâmide regular $ABCV$, de base triangular $ABC$, é tal que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede $3\,\text{cm}$.

Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de $A$ à face $BCV$ é igual a

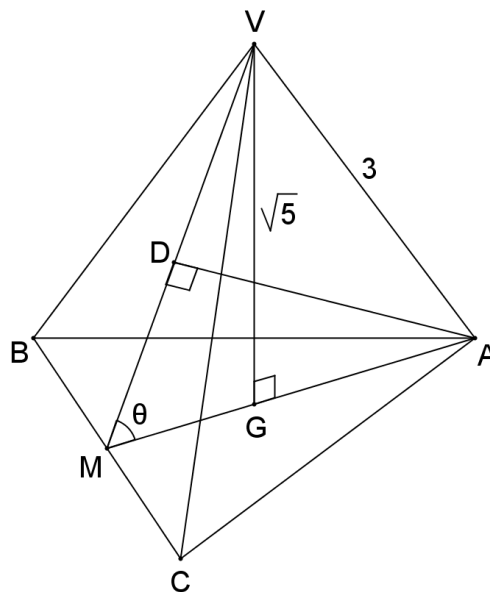
a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Seja $\overline{VG}$ a altura da pirâmide regular, então $G$ é o baricentro do triângulo equilátero $ABC$. Como a pirâmide é regular $\overline{VA}=\overline{VB}=\overline{VC}=3$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao $\Delta VAG$, temos:
$\overline{VA}^2 = \overline{VG}^2 + \overline{GA}^2 \Leftrightarrow 3^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \overline{GA}^2 \Leftrightarrow \overline{GA} = 2$.
Como o baricentro divide a mediana na razão $2:1$ a partir do vértice do triângulo, temos:
$\overline{AM} = \frac{3}{2} \cdot \overline{GA} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

Portanto, o lado do triângulo equilátero $ABC$ é $\frac{L\sqrt{3}}{2} = 3 \Leftrightarrow L = 2\sqrt{3}$.

No $\Delta VMG$ retângulo, onde $V\hat{M}A = \theta$ é um ângulo agudo, temos:
$\operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{VG}}{\overline{MG}} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \Rightarrow \operatorname{cossec}^2\theta = 1 + \operatorname{cotg}^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

No $\Delta ADM$ retângulo, temos: $\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\overline{AD}}{3} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ cm.

19) Uma caixa cúbica, cuja aresta mede $0,4$ metros, está com água até $\frac{7}{8}$ de sua altura.

Dos sólidos geométricos abaixo, o que, totalmente imerso nessa caixa, **NÃO** provoca transbordamento de água é

a) uma esfera de raio $\sqrt[3]{2}$ dm.

b) pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam $30$ cm.

c) um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}$ dm e a altura $3$ dm.

d) um cilindro equilátero, cuja altura seja $20$ cm.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

O volume da caixa cúbica é $V = (0,4)^3 = 0,064\ \text{m}^3$. O volume disponível é $\frac{1}{8} \cdot 0,064 = 0,008\ \text{m}^3 = 8\ \text{dm}^3 = 8000\ \text{cm}^3$.

O volume da esfera de raio $\sqrt[3]{2}$ dm é $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{8}{3}\pi\ \text{dm}^3 > 8\ \text{dm}^3$, logo provoca o transbordamento.

O volume da pirâmide quadrangular regular, cujas arestas da base e altura meçam $30$ cm é $\frac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 30 = 9000\ \text{cm}^3 > 8000\ \text{cm}^3$, logo provoca o transbordamento.

O volume de um cone reto, cujo raio da base meça $\sqrt{3}$ dm e a altura $3$ dm é $\frac{1}{3} \cdot \pi.\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3 = 3\pi\ \text{dm}^3 > 8\ \text{dm}^3$, logo provoca o transbordamento.

O volume de um cilindro equilátero, cuja altura seja $20$ cm e, portanto, diâmetro da base $20$ cm, é $\pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 2000\pi\ \text{cm}^3 < 8000\ \text{cm}^3$, logo não provoca transbordamento.

20) As seis questões de uma prova eram tais, que as quatro primeiras valiam $1,5$ ponto cada, e as duas últimas valiam $2$ pontos cada.
Cada questão, ao ser corrigida, era considerada certa ou errada. No caso de certa era atribuída a ela o total de pontos que valia e, no caso de errada, a nota $0$ (zero).
Ao final da correção de todas as provas, foi divulgada a seguinte tabela:

| Nº DA QUESTÃO | PERCENTUAL DE ACERTOS |
|---|---|
| 1 | 40% |
| 2 | 50% |
| 3 | 10% |
| 4 | 70% |
| 5 | 5% |
| 6 | 60% |

A média aritmética das notas de todos os que realizaram tal prova é
a) $3,7$
b) $3,85$
c) $4$
d) $4,15$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Como a pontuação atribuída às questões erradas é $0$ (zero), a média aritmética das notas de todos que realizaram a prova é obtida pela soma da pontuação média de cada questão (o produto do percentual de acertos pelo valor da questão). Assim, temos:
$\text{Ma} = (40\% + 50\% + 10\% + 70\%) \cdot 1,5 + (5\% + 60\%) \cdot 2 = 3,85$.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2011/2012

1) Três carros, $a$, $b$, $c$, com diferentes taxas de consumo de combustível, percorrerão, cada um, $600\text{ km}$ por um mesmo caminho. No ponto de partida, os três estão com tanque cheio.

Após terem percorrido, cada um, $\frac{1}{5}$ do total previsto, os carros $b$ e $c$ foram abastecidos completando novamente seus tanques e gastaram, juntos, $\text{R\$ }66,00$.
Ao final dos $600\text{ km}$, os três carros foram abastecidos, completando seus tanques, e, nesse abastecimento, juntos, gastaram $\text{R\$ }384,00$. Considerando o preço do litro do combustível usado pelos três carros a $\text{R\$ }3,00$, a distância que o carro $\underline{a}$ percorre, em média, com um litro de combustível é
a) $12\text{ km}$.
b) $15\text{ km}$.
c) $16\text{ km}$.
d) $18\text{ km}$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Supondo que os carros $a$, $b$ e $c$ tenham taxas de consumo de combustível iguais a $A$, $B$ e $C$ $\text{km}/\ell$, respectivamente.
Como $\frac{1}{5}$ do percurso é $\frac{1}{5}\cdot 600 = 120\text{ km}$, os carros $b$ e $c$ consumiram $\frac{120}{B}$ e $\frac{120}{C}$ litros de combustível e o custo foi $\left(\frac{120}{B}+\frac{120}{C}\right)\cdot 3 = 66 \Leftrightarrow \frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{22}{120}$ (*).
Ao final dos $600\text{ km}$, os carros $a$, $b$ e $c$, para completar o tanque de combustível, receberam $\frac{600}{A}$, $\frac{480}{B}$ e $\frac{480}{C}$ litros e o custo foi $\left(\frac{600}{A}+\frac{480}{B}+\frac{480}{C}\right)\cdot 3 = 384 \Leftrightarrow \frac{5}{A}+4\cdot\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=\frac{128}{120}$.
Substituindo (*) na expressão acima, temos: $\frac{5}{A}+4\cdot\frac{22}{120}=\frac{128}{120} \Leftrightarrow \frac{5}{A}=\frac{40}{120} \Leftrightarrow A = 15\text{ km}/\ell$.
Logo, o carro $\underline{a}$ percorre, em média, $15\text{ km}$ com um litro de combustível.

2) O valor de $n$ tal que $\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = 31+i$, sendo $i$ a unidade imaginária, é
a) par menor que $10$.
b) primo maior que $8$.
c) ímpar menor que $7$
d) múltiplo de $9$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O somatório representa a soma dos $n$ primeiros termos de uma $PG$ de primeiro termo $(1+i)$ e razão $(1+i)$, então $\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = \frac{(1+i)\cdot\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^{n+1}-1-i}{i}$.

$$\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = 31+i \Leftrightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1-i}{i} = 31+i \Leftrightarrow (1+i)^{n+1} = 32i \Leftrightarrow \left[(1+i)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} = 32i \Leftrightarrow (2i)^{\frac{n+1}{2}} = 32i$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} = 5 \Leftrightarrow n = 9$$

3) Sejam $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$ uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, respectivamente, ambas com a mesma soma dos termos e ambas crescentes. Se a razão $r$ da progressão aritmética é o dobro da razão $q$ da progressão geométrica, então, o produto $r\cdot q$ é igual a
a) 15
b) 18
c) 21
d) 24

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$PA:(1, a_2, a_3, a_4) \Rightarrow S_{PA} = \frac{(1+a_4)\cdot 4}{2} = 2\cdot(1+1+3r) = 4+6r$$

$$PG:(1, b_2, b_3, b_4) \Rightarrow S_{PG} = 1+q+q^2+q^3$$

$$r = 2q > 0$$

$$S_{PA} = S_{PG} \Leftrightarrow 4+6r = 1+q+q^2+q^3 \Leftrightarrow 4+12q = 1+q+q^2+q^3 \Leftrightarrow q^3+q^2-11q-3 = 0$$

Por inspeção, conclui-se que $q=3$ é raiz da equação. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:
$(q-3)(q^2+4q+1) = 0 \Leftrightarrow q = 3 \lor q = -2\pm\sqrt{3}$.
Como $q>0$, então $q=3$ e $r=6$, donde $r\cdot q = 18$.

4) O polinômio $P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x$ tem uma raiz dupla. Em relação à $P(x)$ é correto afirmar que
a) apenas uma de suas raízes é negativa.
b) a sua raiz dupla é negativa.
c) três de suas raízes são negativas.
d) nenhuma de suas raízes é negativa.

RESPOSTA:

RESOLUÇÃO:

$$P(x) = x^4 - 75x^2 + 250x = x\cdot(x^3 - 75x + 250)$$

$$P(x) = x \cdot (x-\alpha)^2 \cdot (x-\beta) = x \cdot \left[x^3 - (2\alpha+\beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta\right]$$

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha \\ \alpha^2+2\alpha\beta=-75 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\cdot(-2\alpha)=-75 \Leftrightarrow \alpha^2=25 \\ -\alpha^2\beta=250 \Leftrightarrow -25\cdot\beta=250 \Leftrightarrow \beta=-10 \Rightarrow \alpha=5 \end{cases}$$

Portanto, o polinômio $P(x)$ possui raízes $0$, $-10$ e $5$ (dupla), ou seja, apenas uma de suas raízes é negativa.

5) Para evitar que João acesse sites não recomendados na Internet, sua mãe quer colocar uma senha no computador formada apenas por $m$ letras $A$ e também $m$ letras $B$ (sendo $m$ par). Tal senha, quando lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, não deverá se alterar (Ex.: ABBA). Com essas características, o número máximo de senhas distintas que ela poderá criar para depois escolher uma é igual a:

a) $\dfrac{(2m)!}{m!m!}$

b) $\left[\dfrac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}\right]^2$

c) $\dfrac{(2m)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{3m}{2}\right)!}$

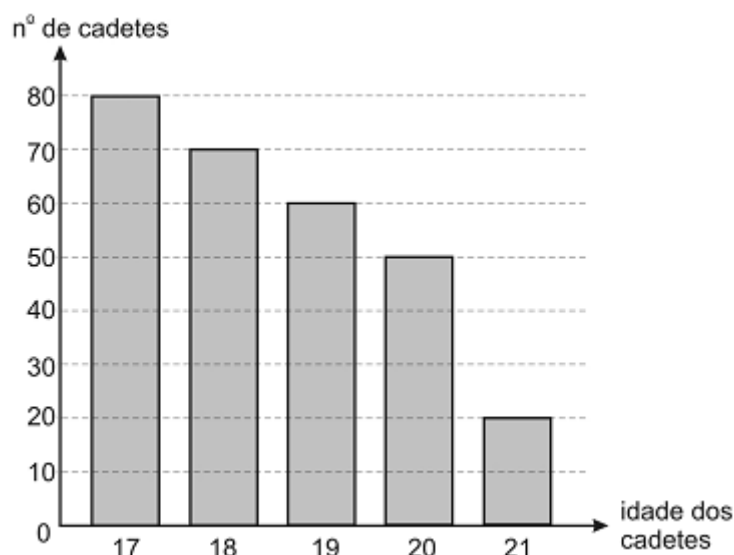
d) $\dfrac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A senha tem $2m$ letras sendo $m$ letras $A$ e $m$ letras $B$. Se a senha, quando lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, não deve se alterar, então a primeira metade e a segunda metade devem ser simétricas e cada uma delas deve possuir $\frac{m}{2}$ letras $A$ e $\frac{m}{2}$ letras $B$.

Basta então definir as posições das $\frac{m}{2}$ letras $A$ na primeira metade da senha, as $\frac{m}{2}$ letras $B$ devem ocupar as posições restantes da primeira metade e a segunda metade da senha é obtida espelhando-se a primeira metade.

Portanto, o número máximo de senhas distintas é $C_m^{m/2} = \dfrac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\cdot\left(\frac{m}{2}\right)!}$.

6) Suponha que a distribuição das idades dos cadetes do 1° ano da Academia da Força Aérea no ano de 2011 esteja representada pelo gráfico seguinte.

Com base nos dados registrados nesse gráfico, é correto afirmar que, escolhido um aluno ao acaso, a probabilidade de ele ter $20$ anos ou $21$ anos é igual a

a) $20\%$
b) $25\%$
c) $30\%$
d) $35\%$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O total de alunos é $n(\Omega)=80+70+60+50+20=280$.
O total de alunos que possuem $20$ anos ou $21$ anos é $n(A)=50+20=70$.
Portanto, escolhido um aluno ao acaso, a probabilidade de ele ter $20$ anos ou $21$ anos é igual a $p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{70}{280}=\frac{1}{4}=25\%$.

7) Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

| MODELO | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| CILINDRADA (em litro) | 1.0 | 1.4 | 1.8 |

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo $a_{ij}$ representa a distância percorrida, em $km$, pelo modelo $i$, com um litro de combustível, à velocidade $10j$ $km/h$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7{,}6 & 7{,}2 & 8{,}9 & 8{,}2 & 11 & 10 & 12 & 11{,}8 \\ 5 & 7{,}5 & 7 & 8{,}5 & 8 & 10{,}5 & 9{,}5 & 11{,}5 & 11 \\ 3 & 2{,}7 & 5{,}9 & 5{,}5 & 8{,}1 & 7{,}4 & 9{,}8 & 9{,}4 & 13{,}1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que:

a) para motoristas que somente trafegam a $30\ km/h$, o carro $1.4$ é o mais econômico.
b) se durante um mesmo período de tempo um carro $1.4$ e um $1.8$ trafegam a $50\ km/h$, o $1.4$ será o mais econômico.
c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de $70\ km/h$, o carro $1.8$ é o de maior consumo.

d) para motoristas que somente trafegam a $80\text{ km/h}$, o carro $1.0$ é o mais econômico.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
a) INCORRETA
$v = 30\text{ km/h} \Rightarrow j = 3$
Observando a terceira coluna da matriz, o carro mais econômico é o $1.0$ que anda $a_{13} = 7,2\text{ km}/\ell$.
b) INCORRETA
$v = 50\text{ km/h} \Rightarrow j = 5$
Observando a quinta coluna da matriz, o carro mais econômico é o $1.0$ que anda $a_{15} = 8,2\text{ km}/\ell$.
c) INCORRETA
$v = 70\text{ km/h} \Rightarrow j = 7$
Observando a sétima coluna da matriz, o carro de maior consumo é o $1.4$ que anda $a_{27} = 9,5\text{ km}/\ell$.
d) CORRETA
$v = 80\text{ km/h} \Rightarrow j = 8$
Observando a oitava coluna da matriz, o carro mais econômico é o $1.0$ que anda $a_{18} = 12\text{ km}/\ell$.

8) Considere no plano cartesiano as retas $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$ e $s: (k+1)x - y - \frac{k}{2} = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$. Sobre as retas $r$ e $s$ é correto afirmar que NUNCA serão
a) concorrentes perpendiculares.
b) concorrentes oblíquas.
c) paralelas distintas.
d) paralelas coincidentes.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$s: (k+1)x - y - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow y = (k+1)x - \frac{k}{2}$$

As retas $r$ e $s$ são concorrentes perpendiculares se, e somente se, $(k+1) \cdot \frac{3}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{3}$.

As retas $r$ e $s$ são concorrentes oblíquas se, e somente se, $(k+1) \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{5}{3}$.

As retas $r$ e $s$ são paralelas se, e somente se, $k + 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow s: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.

Logo, se $r \parallel s$, então elas possuem coeficientes lineares distintos e, portanto, são paralelas distintas. Donde se conclui que $r$ e $s$ nunca serão retas paralelas coincidentes.

9) No plano cartesiano, a circunferência $\lambda$ de equação $x^2+y^2-6x+10y+k=0$, com $k \in \mathbb{R}$, determina no eixo das ordenadas uma corda de comprimento $\ell=8$. Dessa forma, é correto afirmar que

a) $\lambda$ é tangente ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.

b) o raio de $\lambda$ é igual a $\sqrt{k}$.

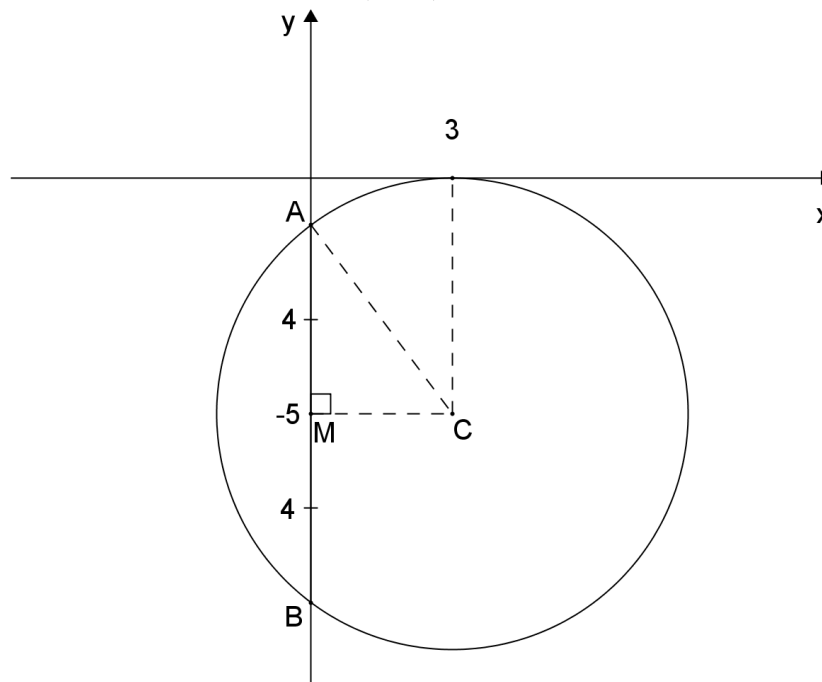
c) $P(k,-1) \in \lambda$.

d) $\lambda$ é secante à reta $x=k$.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$\lambda: x^2+y^2-6x+10y+k=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+10y+25=34-k \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+5)^2=34-k$

Portanto, $\lambda$ é uma circunferência de centro $C(3,-5)$ e raio $\sqrt{34-k}$.

Seja a corda $AB=\ell=8$ e $M$ o seu ponto médio, então $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ e $CM=3$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta ACM$, temos: $AC^2=AM^2+CM^2=4^2+3^2 \Leftrightarrow AC=5$, ou seja, o raio da circunferência $\lambda$ é igual a $5$. Portanto, $\sqrt{34-k}=5 \Leftrightarrow k=9$ e a equação de $\lambda$ é $(x-3)^2+(y+5)^2=25$.

a) CORRETA, pois $\lambda$ tem centro $C(3,-5)$ e raio $5$.

b) INCORRETA, pois $\sqrt{k}=\sqrt{9}=3 \neq 5$.

c) INCORRETA, pois $(9-3)^2+(-1+5)^2=52 \neq 25 \Rightarrow P(9,-1) \notin \lambda$

d) INCORRETA, pois $x=9$ é exterior à $\lambda$.

10) Sejam as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}k\\ 3\\ 5\end{bmatrix}.$$

Em relação à equação matricial $AX=B$, é correto afirmar que

a) é impossível para $k=\frac{7}{2}$.

b) admite solução única para $k=\frac{7}{2}$.

c) toda solução satisfaz à condição $x_1+x_2=4$.

d) admite a terna ordenada $\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$ como solução.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=k \\ x_1+x_2+2x_3=3 & (L_2-L_1) \\ x_1+x_2-2x_3=5 & (L_3-L_1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=k \\ x_3=3-k \\ x_3=\frac{k-5}{3} & (L_3-L_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=k \\ x_3=3-k \\ 0=\frac{4k-14}{3}\end{cases}$$

Analisando o sistema escalonado, temos:

$\frac{4k-14}{3}=0 \Leftrightarrow k=\frac{7}{2}$: sistema possível indeterminado; ou

$\frac{4k-14}{3}\neq 0 \Leftrightarrow k\neq\frac{7}{2}$: sistema impossível.

Assim, o sistema nunca será possível e determinado.

Note ainda que a terna ordenada $\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$ não pode ser solução, pois não satisfaz $x_1+x_2+2x_3=3$.

Se $k=\frac{7}{2}$, o sistema resultante é $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\frac{7}{2} & (L_1-L_2) \\ x_3=-\frac{1}{2} \\ 0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$. Portanto, toda solução satisfaz à condição $x_1+x_2=4$.

11) Considere as proposições abaixo e as classifique em (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) Nas funções reais $g:C\to A$ e $f:A\to B$, se existe a função composta $(f\circ g):P\to S$, então $P=C$ e $S=B$.

( ) Se $h:\{m,n,p\}\to\{m,n,p\}$ é uma função tal que $h(m)=p$, $h(n)=m$ e $h(p)\neq n$, então $h$ é uma função injetora.

( ) Se $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ é uma função tal que $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\neq 1 \text{ e } x\neq 2 \\ x, & \text{se } x=2 \\ x-1, & \text{se } x=1 \end{cases}$, então $(f\circ f\circ f)^{-1}(x)=1$ se, e somente se, $x=0$.

A sequência correta é
a) F – F – V
b) V – V – F
c) F – V – F
d) V – V – V

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
1ª proposição: FALSA
Uma condição suficiente para que exista a função composta é $P\subset C$ e $B\subset S$.
2ª proposição: FALSA
Se $h(p)\neq n$, então $h(p)=m$ ou $h(p)=p$, portanto $h$ não é injetora.
3ª proposição: VERDADEIRA
$(f\circ f\circ f)^{-1}(x)=1 \Leftrightarrow (f\circ f\circ f)(1)=x \Leftrightarrow x=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(1)=0$
$f(1)=1-1=0$
$f(0)=0+1=1$

12) Para angariar fundos de formatura, os cadetes do 1° ano da AFA vendem camisas de malha com o emblema da turma. Se o preço de venda de cada camisa é de $20$ reais, eles vendem por mês $30$ camisas.
Fizeram uma pesquisa e verificaram que, para cada $2$ reais de desconto no preço de cada camisa, são vendidas $6$ camisas a mais por mês.
Dessa forma, é correto afirmar que
a) é possível fazer mais de $10$ descontos de $2$ reais.
b) tanto faz vender as camisas por $12$ reais cada uma ou $18$ reais cada uma que o faturamento é o mesmo.
c) o máximo faturamento ocorre se são vendidas menos de $40$ camisas por mês.
d) se o preço de venda de cada camisa é de 14 reais, então o faturamento é maior que $680$ reais.

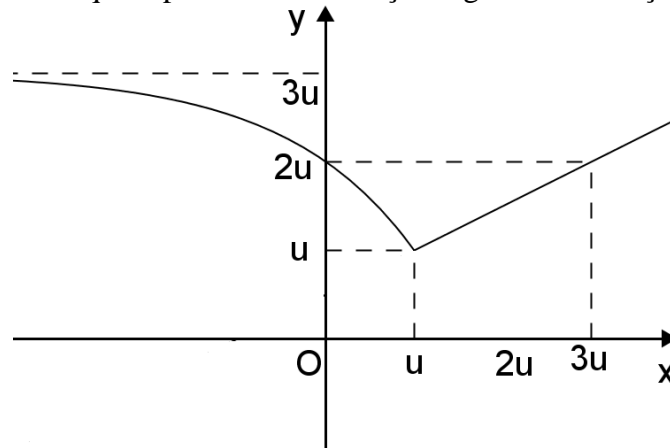
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Se o preço por camisa for $20-2n$, a quantidade de camisas vendidas é $30+6n$ e o faturamento é $f(n)=(20-2n)\cdot(30+6n)=-12n^2+60n+600$.
a) FALSA
Fazendo-se mais de $10$ descontos de $2$ reais, o preço da camisa fica negativo.
b) VERDADEIRA
O preço de $12$ reais ocorre quando $n=4$ e o preço de $18$ reais quando $n=1$. Assim, os faturamentos em ambos os casos são $f(4)=f(1)=648$ reais.

c) FALSA

O máximo faturamento ocorre quando $n = \frac{-60}{2 \cdot (-12)} = 2,5$, ou seja, para $n = 2$ ou $n = 3$.

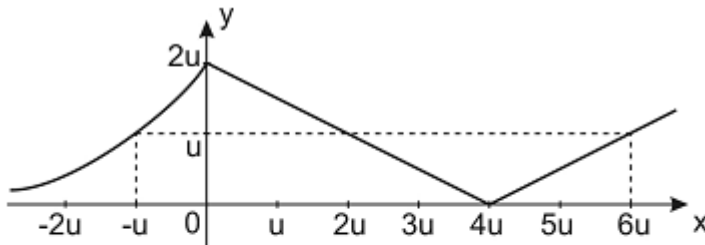
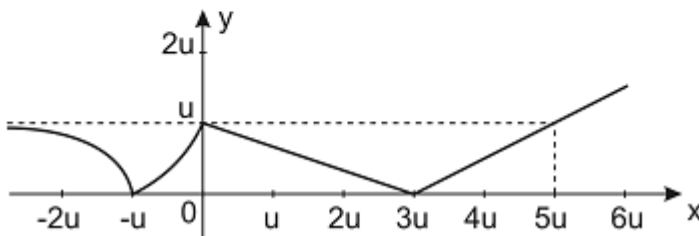
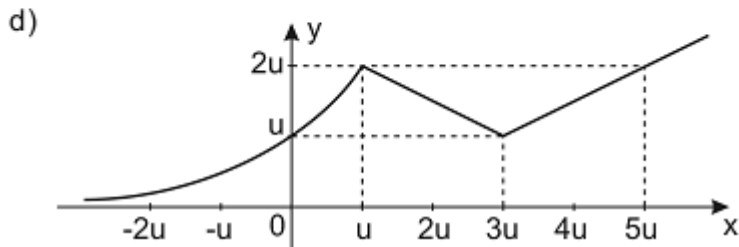
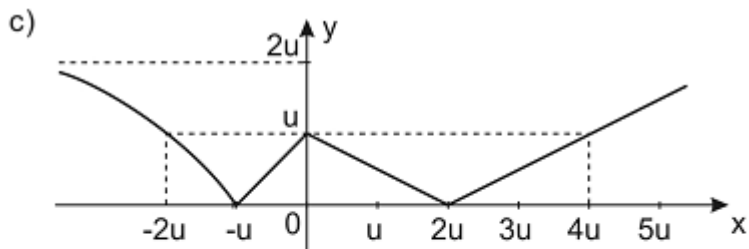
Se $n = 2$, o preço por camisa é 16 reais, a quantidade de camisas vendidas é 42 e o faturamento 672 reais.
Se $n = 3$, o preço por camisa é 14 reais, a quantidade de camisas vendidas é 48 e o faturamento 672 reais.
Em ambos os casos, a quantidade de camisas vendidas supera 40.
d) FALSA
O preço da camisa é 14 reais quando $n = 3$ e o faturamento é 672 reais.

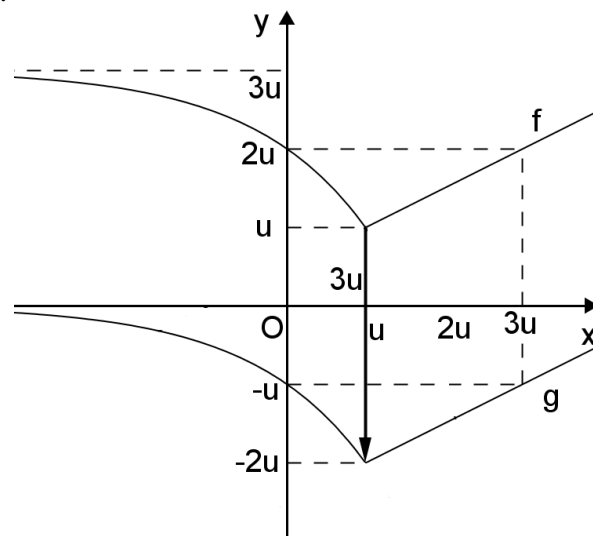
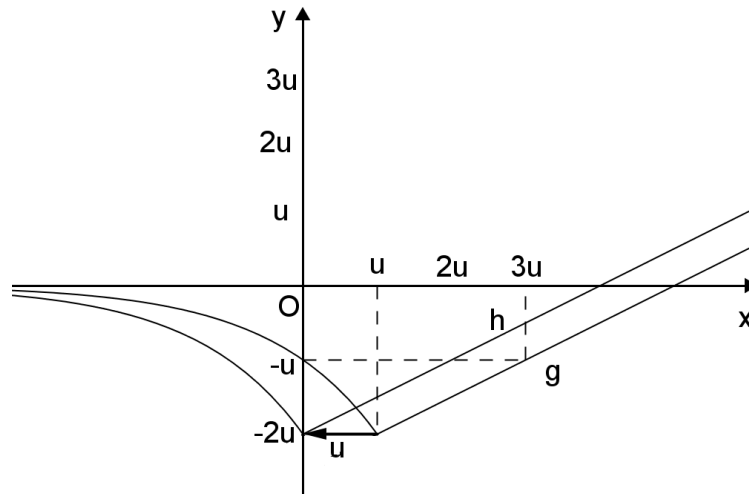
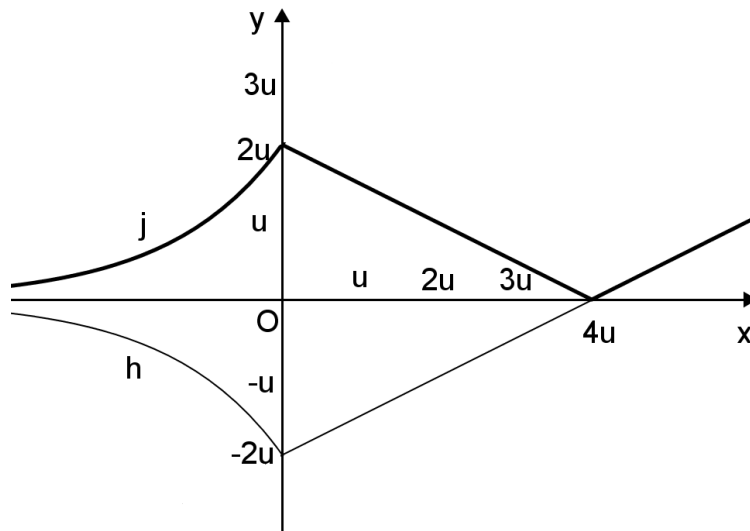
13) Considere a figura abaixo que representa um esboço do gráfico da função real $f$

Sabe-se que $g(x) = f(x) - 3u$, $h(x) = g(x+u)$ e $j(x) = |h(x)|$.
Um esboço do gráfico que melhor representa a função $j$ é

a)

b)

c)

d)

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Como $g(x) = f(x) - 3u$, o gráfico de $g$ pode ser obtido a partir do gráfico de $f$ deslocando-o $3u$ verticalmente para baixo.

Como $h(x) = g(x+u)$, o gráfico de $h$ pode ser obtido a partir do gráfico de $g$ deslocando-o horizontalmente $u$ para a esquerda.

Como $j(x) = |h(x)|$, o gráfico de $j$ pode ser obtido a partir do gráfico de $h$ espelhando-se as partes negativas em relação ao eixo $Ox$.

Logo, o gráfico que melhor representa a função $j$ é o da opção $(a)$.

14) Considere $f$ uma função quadrática de raízes reais e opostas.
O gráfico de $f$ intercepta o gráfico da função real $g$ definida por $g(x) = -2$ em exatamente um ponto.
Se $f(\sqrt{3}) = 4$ e $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, então, é INCORRETO afirmar que
a) $f(x) - g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) o produto das raízes de $f$ é um número ímpar.
c) a função real $h$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$ admite valor máximo.
d) $f$ é crescente $\forall x \in [1, +\infty[$.

RESPOSTA: a

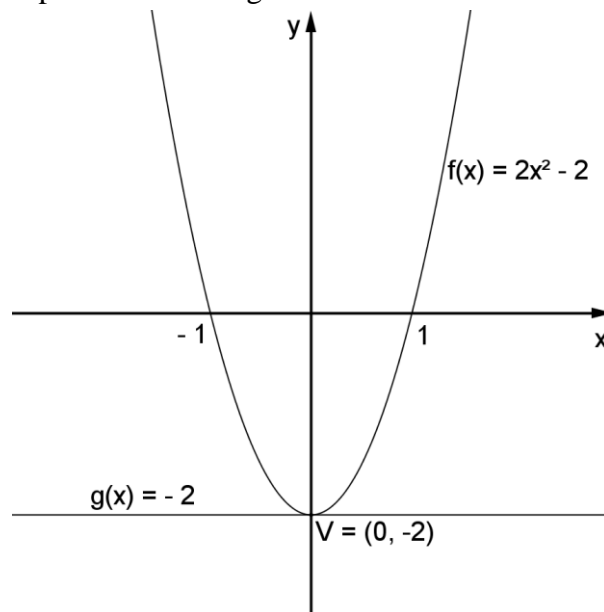
RESOLUÇÃO:
Sejam $\pm r$, com $r > 0$, as raízes de $f$, então $f(x) = a(x-r)(x+r) = a(x^2 - r^2)$.

Se o gráfico de $f$ intercepta o gráfico da função real $g$ definida por $g(x) = -2$ em exatamente um ponto, então a ordenada do vértice da função $f$ é $-2$. Como as raízes são reais e opostas, a abscissa do vértice é $x_V = 0$ e, portanto, a ordenada do vértice é $f(0) = a(0^2 - r^2) = -2 \Leftrightarrow ar^2 = 2$.

$$f(\sqrt{3}) = 4 \Leftrightarrow a\left((\sqrt{3})^2 - r^2\right) = 4 \Leftrightarrow a(3 - r^2) = 4 \Rightarrow a\left(3 - \frac{2}{a}\right) = 4 \Leftrightarrow 3a - 2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r^2 = 2 \Leftrightarrow r = 1$$

Portanto, a função $f$ é dada por $f(x) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$.

Os gráficos de $f$ e $g$ estão representados a seguir:

a) INCORRETO

$f(x) - g(x) = (2x^2 - 2) - (-2) = 2x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Contra-exemplo: $f(0) - g(0) = 0$.

b) CORRETO

O produto das raízes de $f$ é $(-1) \cdot 1 = -1$ que é ímpar.

c) CORRETO

$h(x) = g(x) - f(x) = (-2) - (2x^2 - 2) = -2x^2$, que é uma função quadrática com coeficiente do termo de segundo grau negativo e, portanto, possui valor máximo.

d) CORRETO

A função $f$ é decrescente até $x_V = 0$ e crescente a partir daí. Logo, $f$ é crescente $\forall x \in [1, +\infty[$.

15) Considere uma aplicação financeira denominada UNI que rende juros mensais de $M = \log_{27} 196$ e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de $N = -\log_{\frac{1}{9}} 14$. A razão entre os juros mensais $M$ e $N$, nessa ordem, é

a) 70%

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$
d) 80%

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
$M = \log_{27} 196 = \log_{3^3} 14^2 = \frac{2}{3} \log_3 14$
$N = -\log_{\frac{1}{9}} 14 = -\log_{3^{-2}} 14 = -\left(\frac{1}{-2}\right) \cdot \log_3 14 = \frac{1}{2} \log_3 14$
$\frac{M}{N} = \frac{\frac{2}{3} \log_3 14}{\frac{1}{2} \log_3 14} = \frac{4}{3}$

16) Considere a função real $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$. Sabendo-se que o conjunto $A$ é o mais amplo possível, é verdade que
a) $\exists x \in A$ tal que $g(x) = -1$
b) se $h(x) = -1 + |g(x)|$, então $h$ possui raiz real.
c) se $0 < x < 1$, então $-1 < g(x) < 0$
d) $\exists x \in \left]-\infty, -2\right[$ tal que $g(x) > 3$

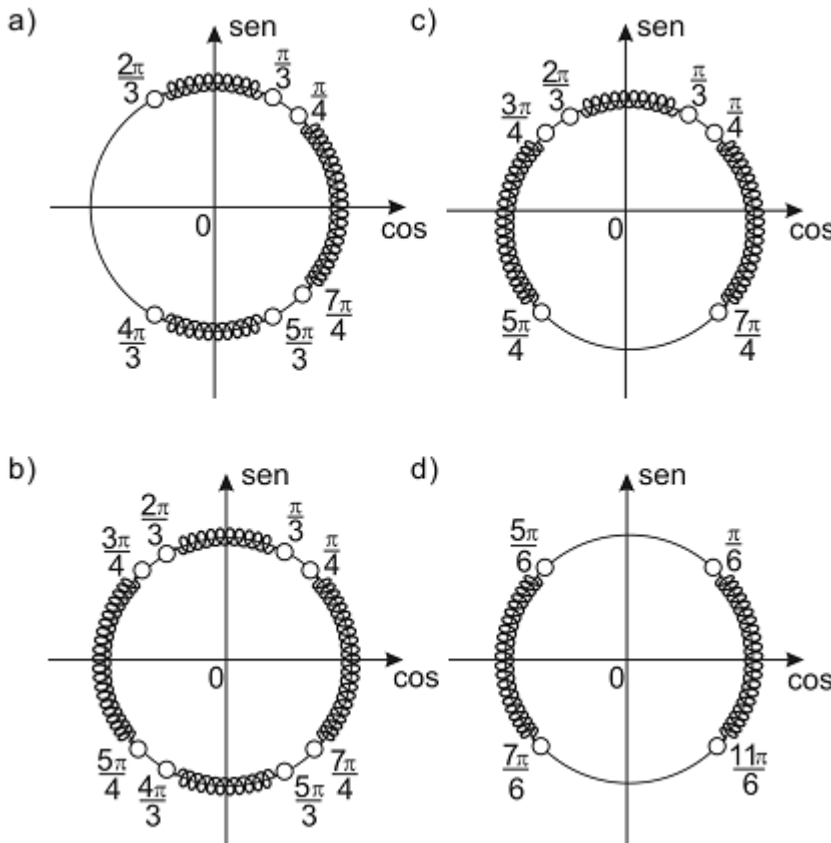
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
$x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -1 \Rightarrow A = \mathbb{R} - \{0, -1\}$
a) FALSA
$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = -1 \Leftrightarrow x^2 - x = -x^2 - x \Leftrightarrow x = 0 \notin A$
Logo, $\nexists x \in A$ tal que $g(x) = -1$
b) FALSA
$h(x) = -1 + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 1 \Leftrightarrow g(x) = \pm 1$
$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 + x \Leftrightarrow x = 0 \notin A$
Logo, a equação $h(x) = -1 + |g(x)|$ não possui raiz real.
c) VERDADEIRA
$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{x^2 + x - 2x}{x(x+1)} = 1 - \frac{2}{x+1}$

$0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < x+1 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow -2 < \frac{-2}{x+1} < -1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < g(x) < 0$

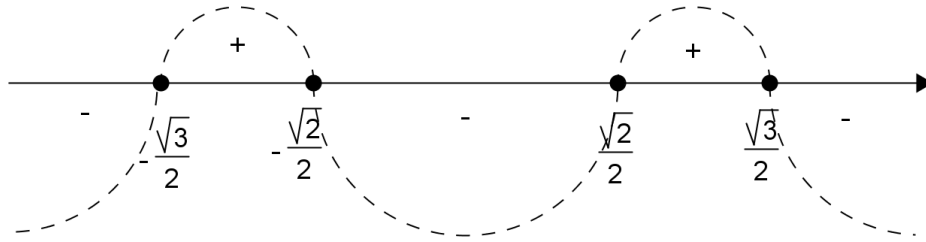
d) FALSA

$x < -2 \Leftrightarrow x+1 < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > -1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1} < 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x+1} < 3 \Leftrightarrow g(x) < 3$

17) Sendo $x \in [0, 2\pi]$, a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação $-8\text{sen}^4 x + 10\text{sen}^2 x - 3 < 0$ é dada por

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$-8\text{sen}^4 x + 10\text{sen}^2 x - 3 < 0 \Leftrightarrow -(2\text{sen}^2 x - 1)(4\text{sen}^2 x - 3) < 0$

Fazendo $\text{sen}\, x = z$, vamos realizar um estudo de sinal de $f(z) = -(2z^2 - 1)(4z^2 - 3)$. As raízes de $f$ são $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dispondo as raízes sobre a reta real e analisando o sinal da função com base no método dos intervalos, temos:

$f(z) < 0 \Leftrightarrow z < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee -\frac{\sqrt{2}}{2} < z < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee z > \frac{\sqrt{3}}{2}$

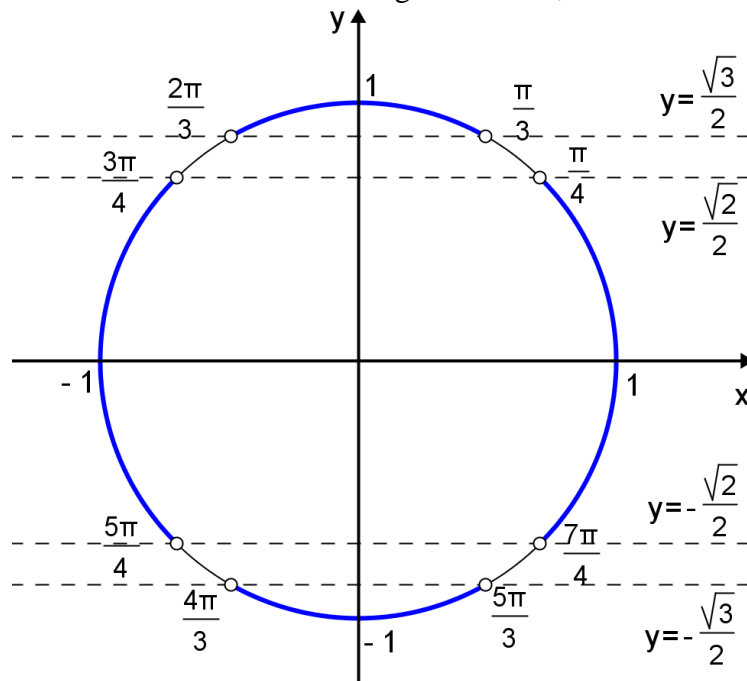
Assim, devemos ter $\operatorname{sen} x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee -\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$\operatorname{sen} x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ ou

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ ou

$\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Representando a união desses intervalos no ciclo trigonométrico, temos:

A figura acima corresponde à alternativa (b).

18) Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$. Sobre a função f é correto afirmar que

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) é periódica com período igual a $\pi$.

c) é decrescente se $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) é ímpar.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O domínio da função $\text{cossec}\, x$ é dado por $\text{sen}\, x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

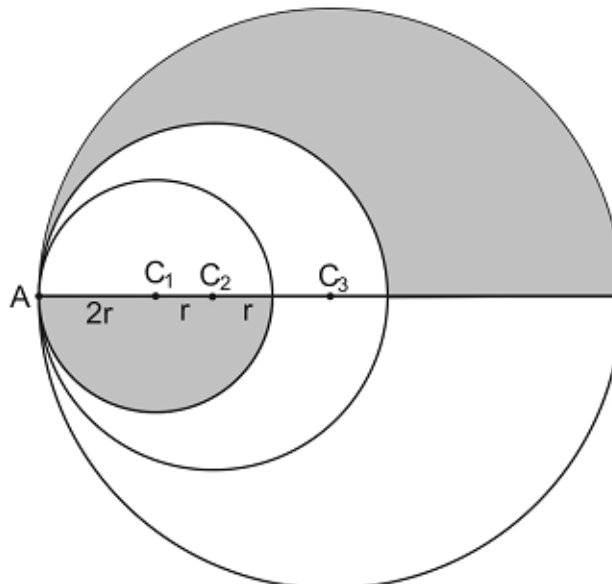
O domínio da função $\sec x$ é dado por $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Além das restrições anteriores, o domínio de $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\text{cossec}\, x} + \frac{\cos x}{\sec x}$ deve satisfazer $\text{cossec}\, x \neq 0$ e $\sec x \neq 0$, o que ocorre sempre que essas funções estão definidas.

Assim, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Para $x \in A$, temos: $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\text{cossec}\, x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\text{sen}\, x}{1/\text{sen}\, x} + \frac{\cos x}{1/\cos x} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Logo, a função $f$ é constante e, portanto, não é periódica de período $\pi$, não é decrescente em nenhum intervalo e não é ímpar.

19) Conforme a figura abaixo, $A$ é o ponto de tangência das circunferências de centros $C_1$, $C_2$ e $C_3$. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.

Se os raios das circunferências de centros $C_1$ e $C_2$ medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

a) $\frac{55}{8}\pi r^2$
b) $\frac{29}{4}\pi r^2$
c) $\frac{61}{8}\pi r^2$
d) $8\pi r^2$

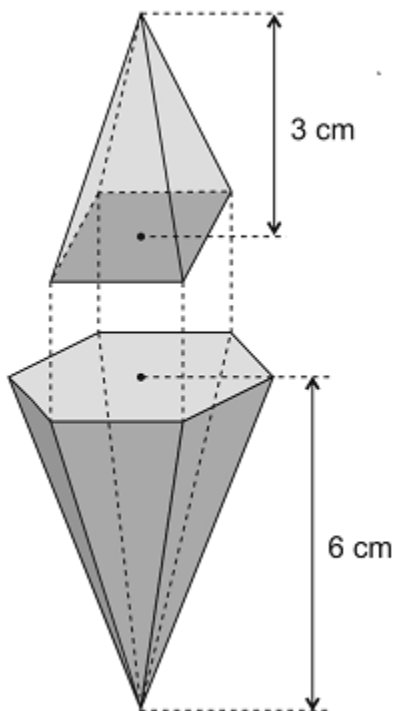
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja $R_3$ o raio da circunferência de centro $C_3$.

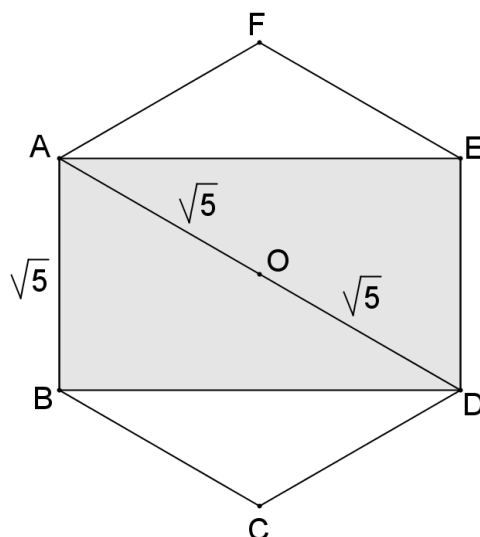
$$PG: 2r, 3r, R_3 \Rightarrow (3r)^2 = (2r)\cdot R_3 \Leftrightarrow R_3 = \frac{9r}{2}$$

A área da região sombreada é igual à metade da área da circunferência de centro $C_3$ menos metade da área da circunferência de centro $C_2$ mais metade da área da circunferência de centro $C_1$. Logo,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{9r}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(3r)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2r)^2 = \left(\frac{81}{8} - \frac{9}{2} + 2\right)\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{61}{8}\pi\cdot r^2.$$

20) Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura $6\text{ cm}$ foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura $3\text{ cm}$, de forma que $4$ dos $6$ vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\text{ cm}$, então, o volume do sólido obtido, em $\text{cm}^3$, é igual a

a) $15\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $25\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Seja $ABCDEF$ o hexágono da base da pirâmide regular e $ABDE$ o retângulo base da pirâmide reta.

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Teorema de Pitágoras no $\Delta ABD$: $BD^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow BD^2 = 15 \Leftrightarrow BD = \sqrt{15}$

$$S_{ABDE} = AB \cdot BD = \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} = 5\sqrt{3}$$

$$V_{P\,HEX} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 15\sqrt{3}$$

$$V_{P\,QUAD} = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 3 = 5\sqrt{3}$$

O volume do sólido obtido é $V = V_{P\,HEX} + V_{P\,QUAD} = 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\ cm^3$.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2010/2011

1) Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ , então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) $\alpha$ pode ser escrito na forma $\alpha = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\alpha \in \left[(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\right]$

d) $\left[(\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})\right] \supset \alpha$

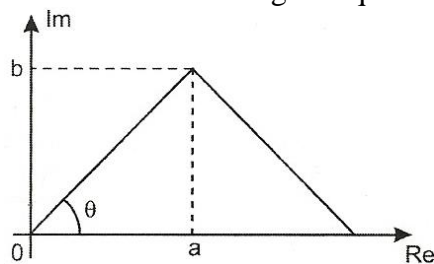
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Logo $\alpha = 2$ pode ser escrito na forma $\alpha = 2k$, com $k = 1 \in \mathbb{Z}$.

2) O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura abaixo.

É correto afirmar que o conjugado de $z^2$ tem afixo que pertence ao

a) 1º quadrante.

b) 2º quadrante.

c) 3º quadrante.

d) 4º quadrante.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como o afixo de $z$ tem argumento igual a $60^\circ$, o afixo de $z^2$ terá argumento igual a $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ e seu conjugado argumento igual a $-120^\circ$. Portanto, o afixo do conjugado de $z^2$ pertence ao 3º quadrante.

3) De um dos lados de uma avenida retilínea, estão dispostos alguns postes nos ponto $P_1, P_2, \ldots, P_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Do outro lado dessa mesma avenida, estão dispostas algumas árvores nos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

- $\overline{P_1P_2} = 3\,\text{dam}$
- $\overline{P_1P_i} = 63\,\text{dam}$
- $\left(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, ...\right)$ é uma progressão aritmética finita de razão 3.
- $\overline{A_1A_j} = \overline{P_1P_i}$
- $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots\right)$ é uma progressão geométrica finita de razão 2.
- $i = j$

Com base nessas informações, é correto afirmar que a maior distância entre duas árvores consecutivas é, em $\text{dam}$, igual a
a) 63
b) 32
c) 18
d) 16

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$\overline{P_1P_i} = 63\,\text{dam}$ é a soma dos termos da $\text{PA}: \overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{i-1}P_i}$ de razão $r = 3$. Assim, temos:
$\overline{P_{i-1}P_i} = \overline{P_1P_2} + 3 \cdot (i - 1 - 1) = 3 + 3(i - 2) = 3i - 3$

$$\frac{\left(\overline{P_1P_2} + \overline{P_{i-1}P_i}\right)(i-1)}{2} = 63 \Leftrightarrow \frac{(3 + 3i - 3) \cdot (i - 1)}{2} = 63 \Leftrightarrow i^2 - i - 42 = 0 \Leftrightarrow \cancel{i = -6} \ \vee \ i = 7$$

Portanto, $i = j = 7$.
$\overline{A_1A_j} = \overline{P_1P_i} = 63\,\text{dam}$ é a soma da $\text{PG}: \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_6A_7}$ de razão $q = 2$. Assim, temos:

$$\frac{\overline{A_1A_2} \cdot \left(2^6 - 1\right)}{2 - 1} = 63 \Leftrightarrow \overline{A_1A_2} = 1.$$

Portanto, a maior distância entre duas árvores é o maior termo da PG, ou seja, $\overline{A_6A_7} = 1 \cdot 2^{6-1} = 2^5 = 32\,\text{dam}$.

4) Sobre o polinômio $A(x)$, expresso pelo determinante da matriz $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$, é INCORRETO afirmar que
a) não possui raízes comuns com $B(x) = x^2 - 1$.
b) não possui raízes imaginárias.
c) a soma das raízes é igual a uma de suas raízes.
d) é divisível por $P(x) = x + 2$.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$A(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}=x^3+2x^2-x-2=x(x^2-1)+2(x^2-1)=(x+2)(x+1)(x-1)$$

a) INCORRETA: $1$ e $-1$ são raízes de $A(x)$ e $B(x)$
b) CORRETA: as raízes são $-2$, $-1$ e $1$ todas reais
c) CORRETA: a soma das raízes é $\frac{-(2)}{1}=-2$ que é igual a uma das raízes
d) CORRETA: o resto da divisão de $A(x)$ por $P(x)$ é $P(-2)=0$.

5) Um colecionador deixou sua casa provido de R$ 5,00, disposto a gastar tudo na loja de miniaturas da esquina. O vendedor lhe mostrou três opções que havia na loja, conforme a seguir.
• 5 diferentes miniaturas de carros, custando R$ 4,00 cada miniatura;
• 3 diferentes miniaturas de livros, custando R$ 1,00 cada miniatura;
• 2 diferentes miniaturas de bichos, custando R$ 3,00 cada miniatura.
O número de diferentes maneiras desse colecionador efetuar a compra das miniaturas, gastando todo o seu dinheiro, é
a) 15
b) 21
c) 42
d) 90

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Temos dois casos possíveis:
1º caso: O colecionador compra um carro e um livro
$\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}=15$ possibilidades
2º caso: O colecionador compra dois livros um bicho
$\binom{3}{2}\times\binom{2}{1}=6$ possibilidades
Pelo princípio aditivo, temos $15+6=21$ possibilidades, no total.

6) Sendo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 2 & c \end{vmatrix}=70$, o valor de $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix}$ é
a) 280
b) 0
c) $-70$
d) $-210$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Partindo da primeira matriz para chegar a segunda matriz foram feitas as seguintes operações:
(1) Troca da terceira coluna pela primeira
(2) Multiplicação da quarta linha por 3.
(3) A quarta linha foi substituída pela soma da terceira linha mais quarta linha.
Sendo assim, para a primeira operação temos a troca de sinal do determinante, o novo valor é $-70$ e, como resultado da segunda operação, temos a multiplicação do valor do determinante por 3, resultando o valor de $-210$. A terceira operação – substituição de uma linha pela sua soma com outra – não altera o valor do determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 2 & c \end{vmatrix} = 70 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 2 & 0 & -1 & c \end{vmatrix} = -70 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 6 & 0 & -3 & 3c \end{vmatrix} = -210 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix} = -210$$

7) Considere que:
I) em uma urna encontram-se $p$ bolas vermelhas e $q$ bolas azuis;
II) duas bolas são retiradas dessa urna, sucessivamente e com reposição.
Sabe-se que $x$ é a variável que indica o número de bolas azuis observadas com as retiradas, cuja distribuição de probabilidade está de acordo coma tabela a seguir.

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0,36 | 0,48 | 0,16 |

Nessas condições, é correto afirmar que
a) a probabilidade de se observar no máximo uma bola azul é $64\%$.
b) se $p=6$, então $q=2$.
c) se $p=18$, então $q=12$.
d) $p+q$ é necessariamente menor ou igual a $100$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l} p(\text{VERMELHA}) = \dfrac{p}{p+q} \\ p(\text{AZUL}) = \dfrac{q}{p+q} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p(2\text{ VERMELHAS}) = \dfrac{p^2}{(p+q)^2} \\ p(1\text{ AZUL} \wedge 1\text{ VERM.}) = \dfrac{2p\cdot q}{(p+q)^2} \\ p(2\text{ AZUIS}) = \dfrac{q^2}{(p+q)^2} \end{cases}$$

A probabilidade de não ser observada nenhuma bola azul nas duas retiradas é $P(0) = 0,26 = P(2\text{ VERMELHAS})$. Assim, temos:

$\frac{p^2}{(p+q)^2}=\frac{36}{100}\Leftrightarrow\frac{p}{p+q}=\frac{6}{10}\Leftrightarrow\frac{p}{q}=\frac{3}{2}$.

a) INCORRETA: A probabilidade de se observar no máximo uma bola azul é $P(0)+P(1)=0,36+0,48=0,84=84\%$.

b) INCORRETA: $p=6\Rightarrow\frac{6}{q}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow q=4$

c) CORRETA: $p=18\Rightarrow\frac{18}{q}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow q=12$

d) INCORRETA: Não há razão para que $p+q$ deva ser menor ou igual a $100$. Note que todas as probabilidades obtidas satisfazem $0\le P\le 1$ para qualquer $p,q\in\mathbb{N}^*$.

8) Um quadrado de $9\text{ cm}^2$ de área tem vértices consecutivos sobre a bissetriz dos quadrantes pares do plano cartesiano. Se os demais vértices estão sobre a reta $r$, que não possui pontos do $3^\circ$ quadrante, é **INCORRETO** afirmar que a reta r

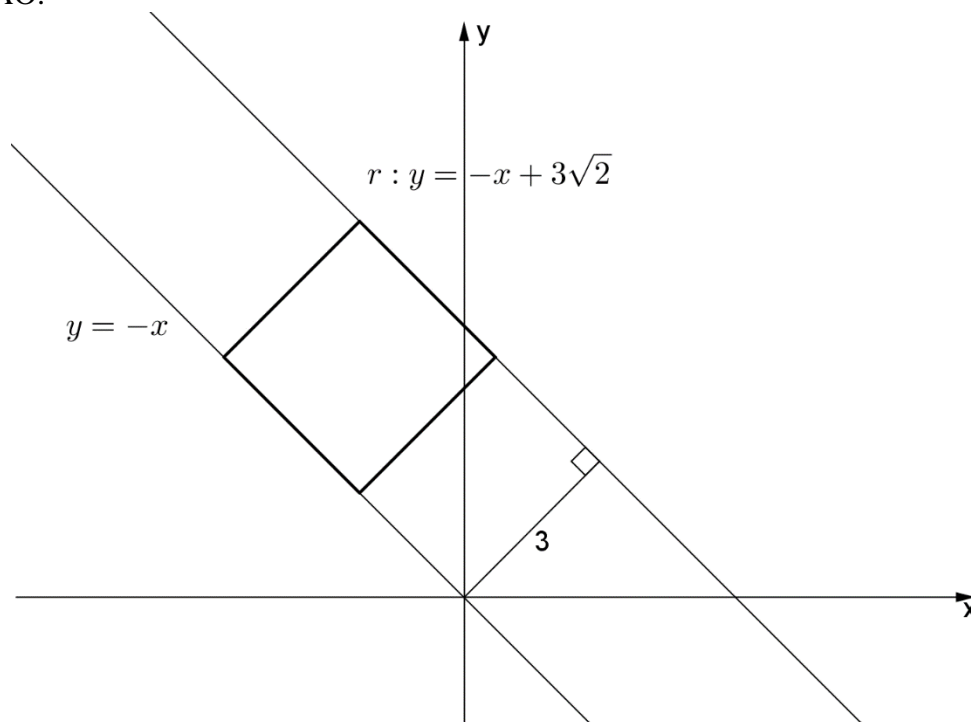
a) pode ser escrita na forma segmentária.

b) possui o ponto $P\left(-\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$.

c) tem coeficiente linear igual a $3\sqrt{2}$.

d) é perpendicular à reta de equação $2x-2y=0$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

O quadrado citado possui dois vértices sobre a reta $y=-x$ (bissetriz dos quadrantes pares) e os outros dois vértices sobre uma reta paralela a $y=-x$, acima dela, ou seja, $r: y=-x+k, k>0$.

Como o quadrado possui área $9\,cm^2$, seu lado possui $3\,cm$, e a distância entre a reta $y=-x$ e a reta $r$ é $3$.
Basta, então, fazer a distância da origem à reta r valer $3$.

$$\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3 \Leftrightarrow |k|=3\sqrt{2}$$

$$k>0 \Rightarrow k=3\sqrt{2} \Rightarrow r: y=-x+3\sqrt{2}$$

a) CORRETA: A equação de r na forma segmentária é $y=-x+3\sqrt{2} \Leftrightarrow x+y=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3\sqrt{2}}+\frac{y}{3\sqrt{2}}=1$.

b) INCORRETA: $P\left(-\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)\notin r$

c) CORRETA: Basta observar que a equação de r é $y=-x+3\sqrt{2}$.

d) CORRETA: A reta $2x-2y=0 \Leftrightarrow y=x$ tem coeficiente angular $1$ e, portanto, é perpendicular à $r$ que tem coeficiente angular $-1$.

9) Três amigos Samuel, Vitória e Júlia, foram a uma lanchonete
• Samuel tomou 1 guaraná, comeu 2 esfirras e pagou 5 reais.
• Vitória tomou 2 guaranás, comeu 1 esfirra e pagou 4 reais.
• Júlia tomou 2 guaranás, comeu 2 esfirras e pagou **k** reais.
Considerando-se que cada um dos três grupos pagou o valor exato que consumiu, é correto afirmar que:
a) o guaraná custou o dobro da esfirra.
b) os três amigos, juntos, consumiram 16 reais.
c) cada esfirra custou 2 reais.
d) Júlia pagou 8 reais pelo que consumiu.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja x o preço do guaraná e y o preço da esfirra, então:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ e } y=2$$

a) INCORRETA: O guaraná custou a metade da esfirra.
b) INCORRETA: Os três amigos juntos consumiram $5x+5y=5(1+2)=15$ reais.
c) CORRETA: Cada esfirra custou $y=2$ reais
d) INCORRETA: O valor pago por Júlia foi $k=2x+2y=2\cdot 3=6$ reais.

10) Considere as funções reais $f$ e $g$ tal que $f(x)=x+1$ e que existe a composta de $g$ com $f$ dada por $(gof)(x)=\sqrt{(x+1)^2}$. Sobre a função g, é INCORRETO afirmar que ela é
a) par.
b) sobrejetora.
c) tal que $g(x)\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) crescente se $x \in [1, +\infty[$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**

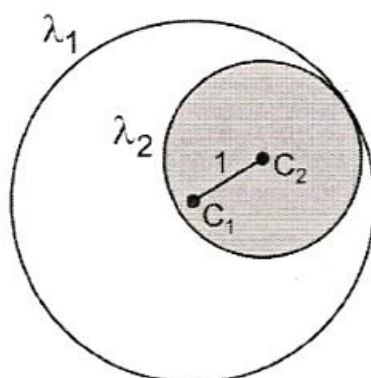
$(gof)(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \Rightarrow g(f(x)) = |f(x)| \Rightarrow g(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

a) CORRETA: $g(-x) = |-x| = |x| = g(x) \Leftrightarrow g$ é par

b) INCORRETA: Se $g$ é uma função real, então $D(g) = CD(g) = \mathbb{R}$. Mas $g(x) = |x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o que implica $Im(g) = \mathbb{R}^+ \neq CD(g)$, então $g$ não é sobrejetora.

c) CORRETA: $g(x) = |x|$ é sempre não negativo para qualquer valor real de $x$.

d) CORRETA: A função $g$ é decrescente em $]-\infty, 0[$ e crescente em $]0, +\infty[$.

11) As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ da figura abaixo interiores e a distância entre os centros $C_1$ e $C_2$ é igual a 11 cm

Se a área sombreada é igual à área não sombreada na figura, é correto afirmar que o raio de $\lambda_2$, em cm, é um número do intervalo

a) $\left]2, \frac{11}{5}\right[$

b) $\left]\frac{11}{5}, \frac{23}{10}\right[$

c) $\left]\frac{23}{10}, \frac{5}{2}\right[$

d) $\left]\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right[$

RESPOSTA: c

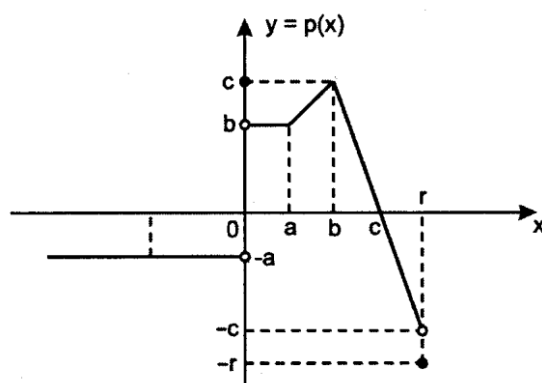
RESOLUÇÃO:

Chamando o raio de $\lambda_2$ de x, que é a distância entre o centro $C_2$ de $\lambda_2$ e o ponto de tangência entre $\lambda_2$ e $\lambda_1$, então o raio de $\lambda_1$ será $x+1$.
Como a área sombreada (área de $\lambda_2$) é igual à área não sombreada (área de $\lambda_1$ menos a área de $\lambda_2$) na figura, temos:

$\pi x^2 = \pi(x+1)^2 - \pi x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

$x > 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

$1,3 < \sqrt{2} < 1,5 \Rightarrow 2,3 < 1 + \sqrt{2} < 2,5 \Rightarrow x \in \left]\frac{23}{10}, \frac{5}{2}\right[$

12) Considere o gráfico da função real $p : A \to B$

Analise as alternativas abaixo e, a seguir, marque a **FALSA**.

a) $p(x) \le 0 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } c \le x \le r\}$.

b) $p(p(p(p(p(r))))) = p(p(p(p(r))))$.

c) Existe um único $x \in A$ tal que $p(x) = c$.

d) $Im(p) = \{-r\} \cup ]-c, c]$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

a) VERDADEIRA: O conjunto corresponde à abscissa dos pontos do gráfico que se encontram abaixo do eixo $Ox$, ou seja, que possuem ordenada negativa.

b) VERDADEIRA: $p(r) = -r \Rightarrow p(p(r)) = p(-r) = -a \Rightarrow p(p(p(r))) = p(-a) = -a$.

Assim, $p(p(p(p(p(r))))) = p(p(p(p(r)))) = -a$.

c) FALSA: $p(0) = p(b) = c$

d) VERDADEIRA: O conjunto $Im(p) = \{-r\} \cup ]-c, c]$ corresponde à projeção do gráfico sobre o eixo das ordenadas ($Oy$).

13) Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a função $f : A \to A$ tal que $f(3) = 1$ e $f(x) = x + 1$, se $x \ne 3$.

A soma dos valores de $x$ para os quais $(f \circ f \circ f)(x) = 3$ é

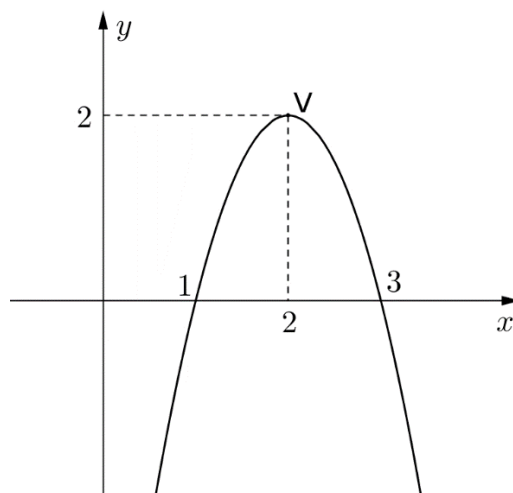
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

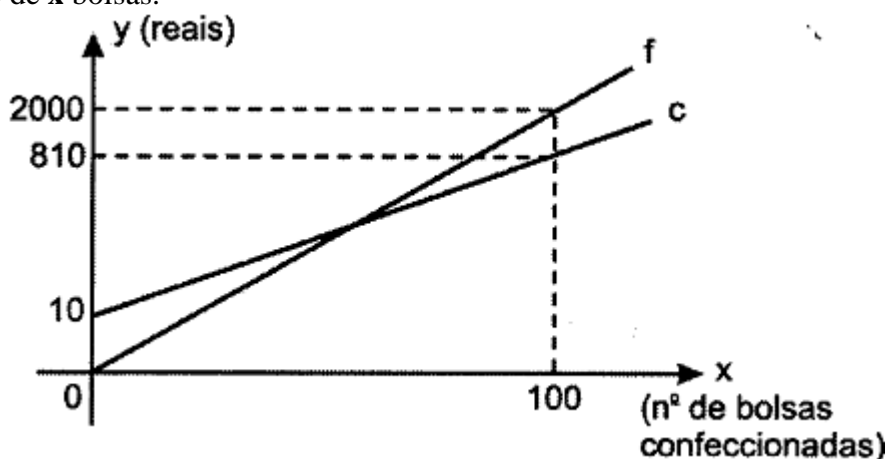
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$A = \{0,1,2,3\}$
$f : A \to A$
$f(3) = 1$
$f(x) = x+1, \text{ se } x \neq 3$
$\Rightarrow f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$
$(f \circ f \circ f)(x) = 3 \Rightarrow f(f(f(x))) = 3 \Leftrightarrow f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$
Logo, a soma dos valores de x tais que $(fofof)(x) = 3$ é $0+3=3$.

14) Considere a função quadrática $f : A \to B$ de raízes $x_1 = 1$ ou $x_2 = 3$, cujas coordenadas do vértice são iguais. Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$ e $[p, q]$ é o maior intervalo para o qual $f$ é uma função crescente, então $(q-p)$ é igual a
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**
Como as raízes da função são 1 e 3 temos que $f(x) = a(x-1)(x-3) = ax^2 - 4ax + 3a$.
Assim, $x_v = -\frac{(-4a)}{2a} = 2 = y_v \Rightarrow a = -2$.
O gráfico de f é dado por:

Logo, o maior intervalo para o qual a função é não negativa e crescente é $[1,2] \Rightarrow q-p=2-1=1$.

15) Luiza possui uma pequena confecção artesanal de bolsas. No gráfico abaixo, a reta **c** representa o custo total mensal com a confecção de **x** bolsas e a reta **f** representa o faturamento mensal de Luiza com a confecção de **x** bolsas.

Com base nos dados acima, é correto afirmar que a Luiza obtém lucro se, e somente se, vender
a) no mínimo 2 bolsas
b) pelo menos 1 bolsa
c) exatamente 3 bolsas
d) no mínimo 4 bolsas

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
A função do 1º grau f passa nos pontos $(0,0)$ e $(100,2000)$, então $f(x)=20x$.
A função do 1º grau c passa nos pontos $(0,10)$ e $(100,810)$, então o coeficiente angular de $c(x)$ é $\frac{810-10}{100-0}=8$, o coeficiente linear é 10 e $c(x)=8x+10$.
Para que se obtenha lucro é necessário que

$f(x) \geq c(x) \Leftrightarrow 20x \geq 8x + 10 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{6}$

Logo, é necessário vender pelo menos 1 bolsa.

16) Um médico, apreciador de logaritmos, prescreveu um medicamento a um de seus pacientes, também apreciador de logaritmo, conforme a seguir.

> Tomar x gotas do medicamento α de 8 em 8 horas. A quantidade de gotas y diária deverá ser calculada pela fórmula $\log_8 y = \log_2 6$.

Considerando $\log 2 = \frac{3}{10}$ e $\log 3 = 0,48$, é correto afirmar que $\log_2 x$ é um número do intervalo

a) [3,4[
b) [4.5[
c) [5,6[
d) [6,7[

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A quantidade de gotas diárias é $y = 3x$.

$$\log_8 y = \log_2 6 \Rightarrow \log_{2^3} 3x = \log_2 6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 3x = \log_2 6 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 3 = 3 \cdot (\log_2 2 + \log_2 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 3(1 + \log_2 3) - \log_2 3 = 3 + 2\log_2 3 = 3 + 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} = 3 + 2 \cdot \frac{0,48}{3/10} = 3 + 2 \cdot 1,6 = 6,2$$

17) Classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo, onde $a \in \mathbb{R}$.

I) $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II) se $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ e $a > 0$, então $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > a\}$

III) se $a > 0$ e $|x| < a$, então $x^2 - a^2 < 0$.

Tem-se a sequência correta em

a) F – V – F
b) F – F – V
c) V – F – V
d) F – V – V

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
I) FALSA

Se $x = a$, a expressão $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ não está definida.

II) VERDADEIRA

$\frac{1}{x} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x + a}{ax} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > a$

III) VERDADEIRA

$a > 0 \text{ e } 0 \le |x| < a \Rightarrow (|x|)^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0$

18) O período da função real **f** definida por $f(x) = \frac{\text{sen}3x + \text{sen}x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

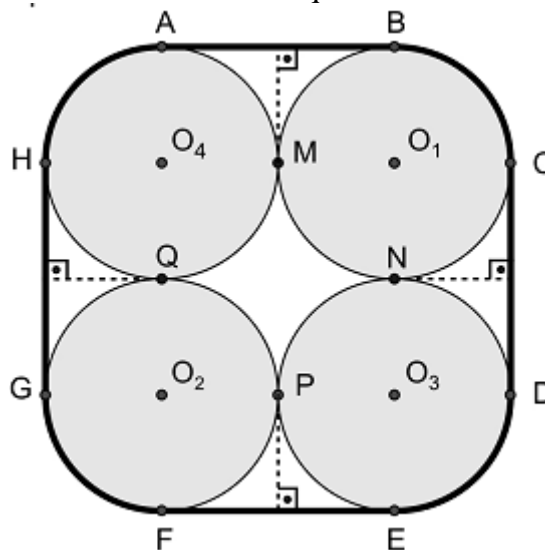
a) $2\pi$
b) $\pi$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{2}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$f(x) = \frac{\text{sen}3x + \text{sen}x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2\text{sen}2x \cos x}{2\cos 2x \cos x} = \text{tg}2x$

Como o período da função $\text{tg}x$ é $\pi$, então o período da função $f(x) = \text{tg}\,2x$ é $\frac{\pi}{2}$.

19) Na figura abaixo têm-se quatro círculos, congruentes de centros $O_1$, $O_2$, $O_3$ e $O_4$ e de raio igual a $10\text{ cm}$. Os pontos M, N, P e Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G e H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna.

Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a

a) $2(\pi+40)$
b) $5(\pi+16)$
c) $20(\pi+4)$
d) $5(\pi+8)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Os arcos HA, BC, DE e FG são iguais a $\frac{1}{4}$ da circunferência de raio 10 cada um, então a soma dos comprimentos desses quatro arcos é igual ao comprimento de uma circunferência completa, ou seja, $2\pi\cdot 10 = 20\pi$.
Os segmentos de reta AB, CD, EF e GH são iguais a 2 raios, ou seja, 20 cm cada.
Portanto, o perímetro da correia é dado por $20\pi + 4\cdot 20 = 20\cdot(\pi+4)$ cm.

20) Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade.
Sabe-se que cada mercado receberá 2 barris de vinho, com altura igual a $\frac{1}{5}$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade **x** de mercados que receberão os barris (com capacidade máxima ocupada) é tal que **x** pertence ao intervalo
a) $0 < x < 20$
b) $20 \le x < 40$
c) $40 \le x < 60$
d) $60 \le x < 80$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Supondo que o cilindro da vinícola tenha altura h e raio da base R, então seu volume é dado por $V_{vini} = S_{base}\cdot h = \pi R^2 H$.
Os barris do mercado possuem altura $\frac{h}{5}$ e raio da base $\frac{R}{4}$, então seu volume é dado por $V_{merc} = \pi\cdot\left(\frac{R}{4}\right)^2\cdot\frac{h}{5} = \frac{1}{80}\cdot\pi R^2 h = \frac{1}{80}\cdot V_{vini}$.
Portanto, a capacidade de cada barril entregue aos mercados é $\frac{1}{80}$ da capacidade do barril da vinícola.
Como cada mercado recebe 2 barris, então receberá $\frac{1}{40}$ da capacidade do barril da vinícola, o que implica que será possível atender 40 mercados. Assim, temos $x = 40$.

## PROVA DE MATEMÁTICA – ACADEMIA DA FORÇA AÉREA (AFA) – 2009/2010

1) Uma pequena fábrica de cintos paga a seus funcionários o salário, conforme tabela abaixo:

| CARGO | SALÁRIOS (em reais) | Nº DE FUNCIONÁRIOS |
|---|---|---|
| COSTUREIRO(A) | 1000 | 10 |
| SECRETÁRIO(A) | 1500 | 4 |
| CONSULTOR | 2000 | 3 |
| GERENTE | x | 1 |

Certo mês, houve um aumento de 10% sobre os salários da tabela acima para todos os cargos.
Sabendo-se que a nova média salarial passou a ser de 1650 reais, o novo salário do gerente é, em reais, igual a:
a) 5500
b) 5000
c) 3300
d) 3000

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Se todos os salários aumentaram 10%, então a média também aumentou 10%. Assim, temos:

$$1{,}1\cdot\frac{10\cdot 1000+4\cdot 1500+3\cdot 2000+1\cdot x}{10+4+3+1}=1650\Leftrightarrow 22000+x=1500\cdot 18\Leftrightarrow x=5000$$

Portanto, o novo salário do gerente é $1{,}1\cdot 5000=5500$ reais.

2) Sejam $z=x+yi$ ($x\in\mathbb{R}^*$, $y\in\mathbb{R}^*$ e $i$ a unidade imaginária), $\overline{z}$ o conjugado de $z$ e $\lambda$ o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano cartesiano para os quais $z\cdot\overline{z}=2x+3$. Se $A$ e $B$ são os pontos de interseção de $\lambda$ com o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e se $A'$ é o ponto de interseção de $\lambda$ com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ que possui a menor abscissa, então a área do triângulo $A'AB$ é, em unidades de área, igual a
a) $2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$z\cdot\overline{z}=2x+3\Leftrightarrow |z|^2=2x+3\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+3\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=2^2$$

$$u: 3x+y+c=0$$

$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Como A' é o ponto de menor abscissa, então $A' = (-1, 0)$.

$S_{A'AB} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}$ u.a.

3) Sejam as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = 2^{-x}$. Considere os números A e B, tais que $A = f(1) + f(2) + \ldots + f(50)$ e $B = 1 + g(1) + g(2) + \ldots + g(n) + \ldots$. Se o produto de A por B tende para o número $\alpha$, então, $\alpha$ é:
a) ímpar múltiplo de 9.
b) par divisor de 10000.
c) par múltiplo de 15.
d) ímpar múltiplo de 25.

RESPOSTA: d

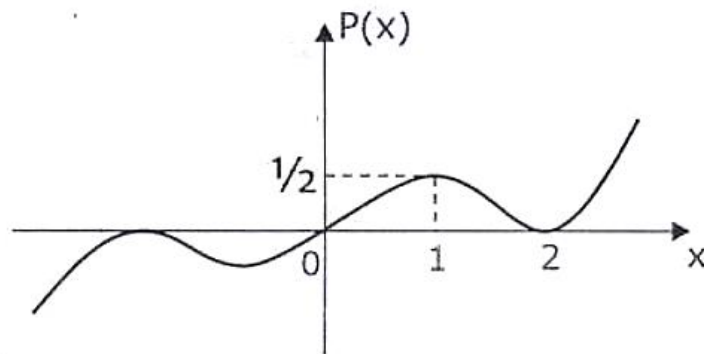
RESOLUÇÃO:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \ldots + \frac{50}{2} = \frac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + 50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+50) \cdot 50}{2} = \frac{1275}{2}$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\alpha = A \cdot B = \frac{1275}{2} \cdot 2 = 1275 = 25 \cdot 51$$

Logo, $\alpha$ é ímpar e múltiplo de 25.

4) Observe a função polinomial $P$ esboçada no gráfico abaixo.

Sabe-se que $x = 0$ ou $x = 2$ são raízes de $P$ e que o resto da divisão de $P(x)$ por $[(x-2) \cdot (x-1) \cdot x]$ é $R(x)$. As raízes de $R(x)$ são números
a) inteiros pares.
b) inteiros ímpares.
c) fracionários opostos.

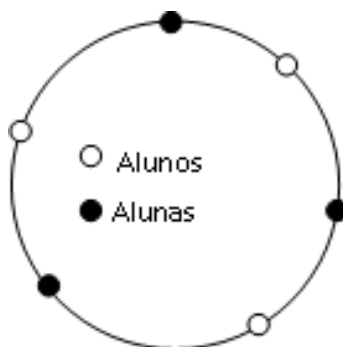
d) irracionais opostos.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
$P(x)=\left[(x-2)(x-1)x\right]\cdot Q(x)+R(x)$
No gráfico observamos que 0 e 2 são raízes de P(x).
$x=0: P(0)=\left[(0-2)(0-1)\cdot 0\right]\cdot Q(0)+R(0) \Rightarrow R(0)=P(0)=0$
$x=2: P(2)=\left[(2-2)(2-1)\cdot 2\right]\cdot Q(2)+R(2) \Rightarrow R(2)=P(2)=0$
Como o divisor é do 3° grau, R(x) é no máximo de 2° grau, logo as duas únicas raízes de R(x) são 0 e 2, que são números inteiros pares.

5) Numa sala de aula, estão presentes $5$ alunos e $6$ alunas. Para uma determinada atividade, o professor deverá escolher um grupo de $3$ dessas alunas e $3$ dos alunos. Em seguida, os escolhidos serão dispostos em círculo de tal forma que alunos do mesmo sexo não fiquem lado a lado. Isso poderá ocorrer de **n** maneiras distintas. O número **n** é igual a:
a) 24000
b) 2400
c) 400
d) 200

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O número de maneiras de escolher os alunos e alunas que comporão o grupo é:
$C_5^3 \cdot C_6^3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=200$.

O número de maneiras de se alocarem os alunos circularmente é $(PC)_3 = 2! = 2$. As alunas devem ficar entre os alunos. O número de maneiras de se alocarem as alunas nas três posições entre os alunos é $P_3 = 3! = 6$ (note que agora não se utilizou permutação circular, pois a disposição dos alunos constitui uma referência para a disposição das alunas).
Sendo assim, o número de maneiras distintas de dispor os alunos e alunas da forma descrita no enunciado é $n = 200\cdot 2\cdot 6 = 2400$.

6) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem o dobro da probabilidade de vencer que o estudante C Admitindo-se que não haja empate na competição, é FALSO afirmar que a probabilidade de
a) A ou B vencer é igual a 0,8.
b) A vencer é igual a 0,4.
c) C vencer é maior que 0,2.
d) B ou C vencer é igual a 0,6.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
$$\left.\begin{matrix} P(A)=P(B)=2x \\ P(C)=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x+2x+x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} P(A)=P(B)=0,4 \\ P(C)=0,2 \end{cases}$$
A opção c) está incorreta, pois a probabilidade de C vencer é igual a 0,2.

7) Seja o sistema S de equações nas incógnitas x, y e z e parâmetro real m

$$S=\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-my-3z=0 \\ x+3y+mz=m \end{cases}$$

Analise as proposições a seguir e assinale a **INCORRETA.**
a) Se $m=-3$, então **S** é impossível.
b) **S** é determinado se, e somente se, $m \neq 0$.
c) Se **S** é homogêneo, então $x+y+z$ não é sempre um número múltiplo de 3.
d) **S** admite solução para todo $m \neq -3$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**
$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-my-3z=0 \\ x+3y+mz=m \end{cases}$$
Vamos inicialmente calcular o determinante da matriz incompleta do sistema:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -m & -3 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m=-3$$
$$m=-3: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+3y-3z=0 \\ x+3y-3z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+3y-3z=0 \\ 0=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA IMPOSSÍVEL}$$

$$m=0:\begin{cases}x+2y-z=0\\x-3z=0\\x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\\2y+2z=0\\y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z=0\\y+z=0\\0=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ SISTEMA POSSÍVEL INDETERMINADO $\Rightarrow S=\{(3t,-t,t):t\in\mathbb{C}\}$

Logo, se $m\neq 0$ e $m\neq -3$, então o SISTEMA POSSÍVEL DETERMINADO

a) CORRETA
b) INCORRETA, pois S é determinado se, e somente se, $m\neq 0$ e $m\neq -3$.
c) CORRETA, pois, apesar de termos $x+y+z=3t$, t não é necessariamente um número inteiro, logo não se pode afirmar que $x+y+z$ seja múltiplo de 3.
d) CORRETA, pois se $m\neq -3$ o sistema não é impossível.

8) Para a fabricação de três modelos de avião, a Embraer precisa de alguns equipamentos, conforme a tabela abaixo

| Equipamentos \ Modelos | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **Poltronas** | 20 | 30 | 60 |
| **Extintores** | 6 | 10 | 15 |

Para o ano de 2009, a Embraer recebeu encomendas dos três modelos, conforme a tabela abaixo

| Ano de 2009 \ Modelo | Primeiro Semestre | Segundo Semestre |
|---|---|---|
| A | **20** | 50% a mais que no 1º semestre |
| B | **y** | 25 |
| C | 10 | 20% a menos que no 1º semestre |

Sabendo-se que a quantidade necessária de poltronas para a fabricação dos três modelos de aviões no ano de 2009 é 3280, então a soma dos algarismos de y é igual a
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O total de encomendas do modelo A em 2009 é $20+20\cdot(1+50\%)=20+20\cdot 1,5=50$.
O total de encomendas do modelo B em 2009 é $y+25$.
O total de encomendas do modelo C em 2009 é $10+10\cdot(1-20\%)=10+10\cdot 0,8=18$.
O total de poltronas para fabricação dos três modelos de aviões no ano de 2008 é dado por
$20\cdot 50+30\cdot(y+25)+60\cdot 18=3280\Leftrightarrow 100+3y+75+108=328\Leftrightarrow 3y=45\Leftrightarrow y=15$

Portanto, a soma dos algarismos de $y=15$ é $1+5=6$.

9) Pedro e Maria com seus filhos Gabriel e João foram a uma clínica médica para uma revisão de saúde. Fazia parte da avaliação aferir o peso de cada um. A balança da clínica era muito antiga e tinha um defeito, só indicava pesos maiores que 60 kg
Para resolver a pesagem, procedeu-se da seguinte maneira:
Pesou-se
•Pedro, Maria e Gabriel, totalizando 150 kg.
•Pedro, Gabriel e João, totalizando 117 kg.
•Maria, Gabriel e João, totalizando 97 kg.
•Pedro, Maria, Gabriel e João, totalizando 172 kg.
Com base nessas informações, é correto afirmar que:
a) com essa balança é possível pesar Gabriel e João juntos.
b) a diferença entre os pesos de Pedro e Maria é o peso de João.
c) Pedro é mais pesado que Maria e João juntos.
d) não é possível pesar Maria sozinha nessa balança.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
$$\begin{cases} P+M+G=150 \\ P+G+J=117 \\ M+G+J=97 \\ P+M+G+J=172 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J=172-150=22 \\ M=172-117=55 \\ P=172-97=75 \\ G=150-75-55=20 \end{cases}$$
Portanto, não é possível pesar Maria sozinha na balança, pois ela possui menos de 60 kg.

10) Considere as circunferências dadas pela equação $x^2+y^2=\frac{1}{b^2}$ $(b>0)$. A circunferência que circunscreve um quadrado de área igual a 1250 é tal que b pertence ao intervalo
a) $\left]0,\frac{1}{30}\right[$
b) $\left]\frac{1}{30},\frac{1}{28}\right[$
c) $\left]\frac{1}{28},\frac{1}{26}\right[$
d) $\left]\frac{1}{26},\frac{1}{24}\right[$

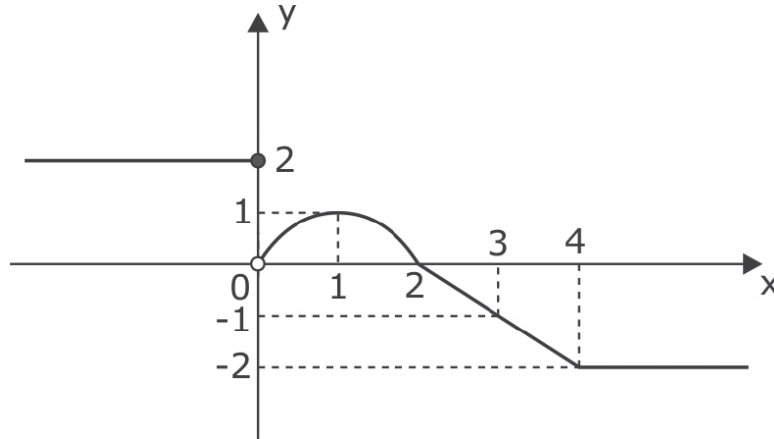
RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**
Seja L o lado do quadrado, então $S=L^2=1250 \Leftrightarrow L=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}$.

O lado do quadrado inscrito em uma circunferência de raio R é $R\sqrt{2}$, então $L = 25\sqrt{2} = R\sqrt{2} \Leftrightarrow R = 25$.

A circunferência de equação $x^2 + y^2 = \frac{1}{b^2}$ ($b > 0$) possui raio $R = \frac{1}{b}$, então

$\frac{1}{b} = R = 25 \Leftrightarrow b = \frac{1}{25} \in \left]\frac{1}{26}, \frac{1}{24}\right[$

11) Analise o gráfico abaixo da função real $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se $h$ é uma função real tal que $h(x) = g(x) + 2$, então, marque alternativa verdadeira.

a) $(h \circ h \circ h \ldots \circ h)(0) = 4$

b) $(h \circ h \circ h)(3) > (h \circ h \circ h \circ h)(2)$

c) Se $y = h\left(h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$ então $y \in ]2, 3[$

d) Se $x = h\left(h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)$ então $x \in ]1, 2[$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

a) FALSA

$h(0) = g(0) + 2 = 2 + 2 = 4$

$h(h(0)) = h(4) = g(4) + 2 = (-2) + 2 = 0$

É fácil provar por indução finita que $h^n(0) = \underbrace{(h \circ h \circ \ldots \circ h)}_{\text{n vezes}}(0) = \begin{cases} 4, & \text{se n é ímpar} \\ 0, & \text{se n é par} \end{cases}$.

b) FALSA

$h(3) = g(3) + 2 = (-1) + 2 = 1 \Rightarrow h(h(3)) = h(1) = g(1) + 2 = 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow (h \circ h \circ h)(3) = h(h(h(3))) = h(3) = 1$

$h(2)=g(2)+2=0+2=2\Rightarrow h(h(2))=h(2)=2$

$\Rightarrow(h\circ h\circ h\circ h)(2)=h\left(h\left(h\left(h(2)\right)\right)\right)=h\left(h(2)\right)=2$

$\Rightarrow(h\circ h\circ h)(3)=1<2=(h\circ h\circ h\circ h)(2)$

c) VERDADEIRA

$h\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)+2$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\in\,]0,1[\,\Rightarrow h\left(\frac{1}{2}\right)=a\in\,]2,3[$

$h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)=h(a)=g(a)+2$

$a\in\,]2,3[\,\Rightarrow g(a)\in\,]-1,0[\,\Rightarrow h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)=b\in\,]1,2[$

$y=h\left(h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)=h(b)=g(b)+2$

$b\in\,]1,2[\,\Rightarrow g(b)\in\,]0,1[\,\Rightarrow y=h\left(h\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)=\,]2,3[$

d) FALSA

$h\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)+2$

$g\left(\frac{3}{2}\right)\in\,]0,1[\,\Rightarrow h\left(\frac{3}{2}\right)=a\in\,]2,3[$

$h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)=h(a)=g(a)+2$

$a\in\,]2,3[\,\Rightarrow g(a)\in\,]-1,0[\,\Rightarrow h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)=b\in\,]1,2[$

$y=h\left(h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)=h(b)=g(b)+2$

$b\in\,]1,2[\,\Rightarrow g(b)\in\,]0,1[\,\Rightarrow y=h\left(h\left(h\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)=\,]2,3[$

Note que o raciocínio desenvolvido em d) é completamente análogo ao de c).

12) Considere a reta $r$ simétrica da reta $(s)\ 2x+y-2=0$ em relação a reta $(t)\ x-3y-2=0$. Com base nisso, marque a alternativa verdadeira.

a) Se $-\frac{10}{3}<y<0$ então $r\cap t=\varnothing$.

b) $\exists P(x,y)\in r$ tal que $x<0$ e $y<0$.

c) Na reta $r$, se $x>\frac{8}{7}$ então $y<-\frac{2}{7}$.

d) $\nexists\ P(x,y) \in r$ tal que $x > 0$ e $y < -\frac{10}{3}$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
1° PASSO: Determinar o ponto A de interseção entre as retas s e t.

$$A: \begin{cases} s: 2x + y - 2 = 0 \\ t: x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{8}{7}, -\frac{2}{7}\right)$$

2° PASSO: Determinar um ponto qualquer da reta s.

$$s: 2x + y - 2 = 0 \Rightarrow B = (0,2) \in s$$

3° PASSO: Determinar a reta u perpendicular a t passando por B.

$$u: 3x + y + c = 0 \text{ e } B = (0,2) \in u \Rightarrow c = -2 \Rightarrow u: 3x + y - 2 = 0$$

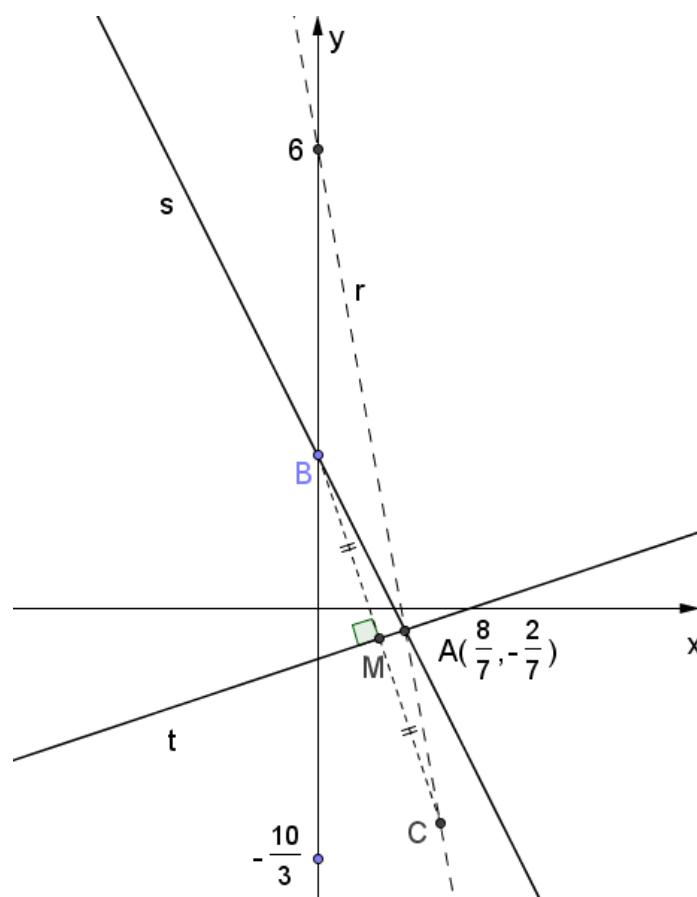
4° PASSO: Determinar o ponto M de interseção entre as retas u e t.

$$M: \begin{cases} u: 3x + y - 2 = 0 \\ t: x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

5° PASSO: Determinar o ponto C tal que M é médio de $\overline{BC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_C + 0}{2} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow x_C = \dfrac{8}{5} \\ \dfrac{y_C + \frac{10}{5}}{2} = -\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow y_C = -\dfrac{14}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow C = \left(\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}\right)$$

6° PASSO: Determinar a reta r passando por A e C.

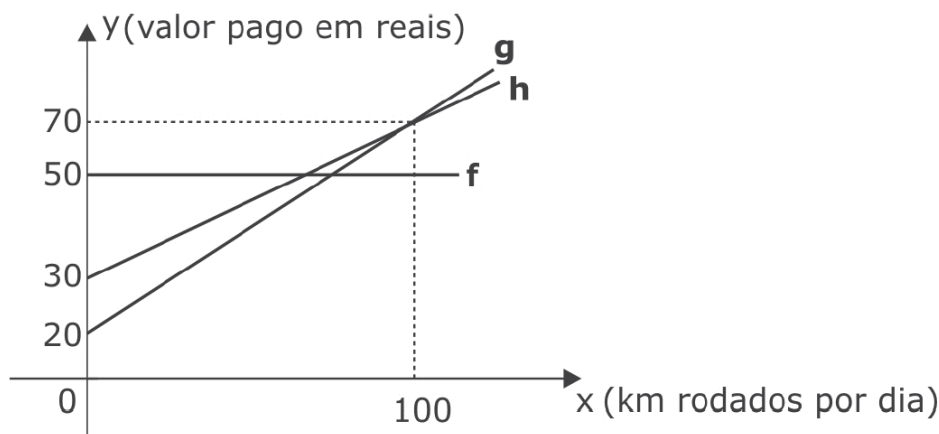
$$m = \frac{-\frac{14}{5} + \frac{2}{7}}{\frac{8}{5} - \frac{8}{7}} = -\frac{11}{2} \text{ e } y - \left(-\frac{2}{7}\right) = m\left(x - \frac{8}{7}\right) \Leftrightarrow r: y = -\frac{11}{2}x + 6$$

Análise das opções:

a) Falsa, pois $A=\left(\frac{8}{7},-\frac{2}{7}\right)\in r\cap t$

b) Falsa, observe no gráfico acima que a reta r não possui pontos no 3º quadrante.

c) Verdadeira, pois $A=\left(\frac{8}{7},-\frac{2}{7}\right)\in r$ e r é função afim decrescente.

d) Falsa, pois $(2,-5)\in r$

13) Na figura abaixo, tem-se representado as funções f, g e h que indicam os valores pagos, respectivamente, às locadoras de automóveis $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ para x quilômetros rodados por dia. Uma pessoa pretende alugar um carro e analisa as três opções.

Após a análise, essa pessoa conclui que optar pela locadora $\alpha$ ao invés das outras duas locadoras, é mais vantajoso quando $x \in ]\, m, +\infty\, [$, $m \in \mathbb{R}$. O menor valor possível para m é

a) 60
b) 70
c) 80
d) 90

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O menor valor possível para m ocorre quando ele é igual à abscissa do ponto de interseção dos gráficos de f e g.
A função f é uma função constante dada por $f(x) = 50$.
A função g é uma função afim determinada pelos pontos (0, 20) e (100,70), então seu coeficiente angular é $\frac{70-20}{100-0} = \frac{1}{2}$, seu coeficiente linear é 20, e sua equação $g(x) = \frac{1}{2}x + 20$.
A interseção dos gráficos de f e g é dada por

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 50 = \frac{1}{2}x + 20 \Leftrightarrow x = 60$$

Portanto, o menor valor possível para m é 60.

14) Sobre a função real $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \log_2(x^2)$, é **INCORRETO** afirmar que é

a) par.
b) sobrejetora.
c) crescente se $x \in [1, +\infty[$.
d) injetora.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**
a) CORRETA
A função f é par, pois $f(-x) = 1 + \log_2\left((-x)^2\right) = 1 + \log_2(x^2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

b) CORRETA
Seja $y \in \mathbb{R}$ um elemento do contradomínio de f, então

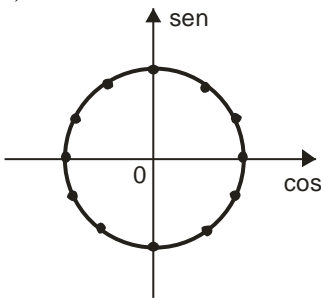
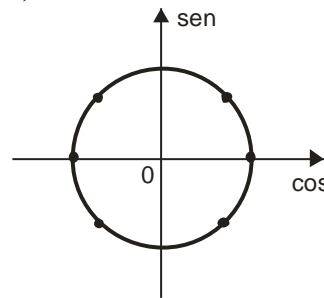
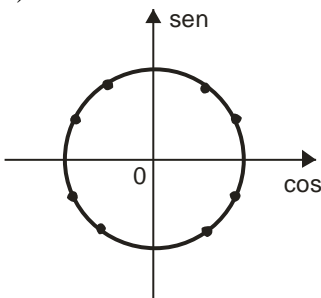
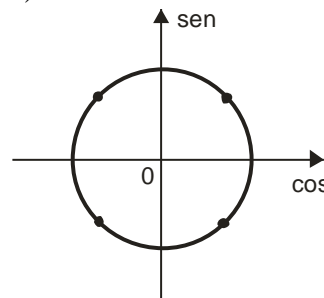
$$y = 1 + \log_2\left(x^2\right) \Leftrightarrow y - 1 = \log_2\left(x^2\right) \Leftrightarrow x^2 = 2^{y-1} \Leftrightarrow x = \pm 2^{\frac{y-1}{2}} \in \mathbb{R}^* = D_f .$$

Portanto, todo real $y \in CD_f$ é imagem de algum $x \in D_f$, o que implica que a função f é sobrejetora.
c) CORRETA
As funções $y = x^2$ e $y = \log_2 x$ são crescentes em $\left[1, +\infty\right[$, então a função $f(x) = 1 + \log_2\left(x^2\right)$ é crescente em $\left[1, +\infty\right[$.
d) INCORRETA
Observe no desenvolvimento da alternativa b) que cada $y \in CD_f$ é imagem de dois valores de $x \in D_f$, $x = \pm 2^{\frac{y-1}{2}}$. Portanto, a função não é injetora.

15) Seja a função real f definida por $f(x) = \cos(4x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$. Marque a alternativa que possui a melhor representação, no ciclo trigonométrico, de todas as raízes da função f.

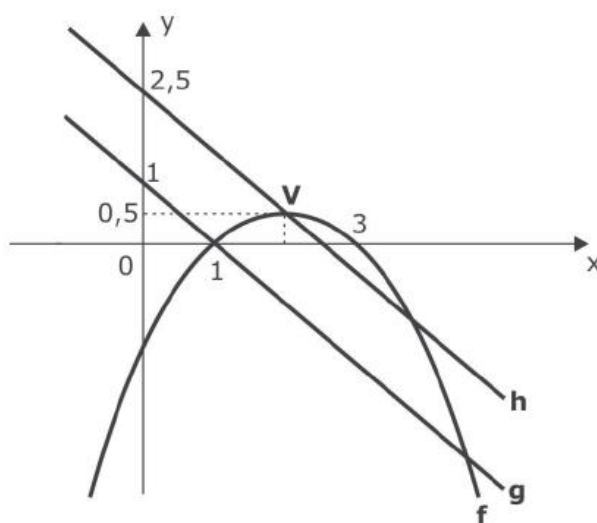
a)
c)
b)
d)
RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\cos(4x)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)=0 \Leftrightarrow \cos(4x)-\cos(6x)=0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\left(\frac{4x-6x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{4x+6x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}(-x)\operatorname{sen}(5x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(5x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z} \text{ ou } 5x=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$$

Na primeira volta do ciclo trigonométrico, teremos 0, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\pi$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ e $\frac{9\pi}{5}$.

16) Considere o esboço dos gráficos das funções reais f, g e h, tais que f é do 2° grau e g e h são do 1° grau.
Sabe-se que V é o vértice da parábola.

O conjunto de todos os valores de x para os quais $h(x)>g(x)>f(x)$ é

a) $\mathbb{R}-]1,5[$

b) $\mathbb{R}-[1,5]$

c) $\mathbb{R}-[1,3]$

d) $\mathbb{R}-]1,3[$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

A função quadrática f possui raízes 1 e 3, e vértice $V=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

Escrevendo f na forma $f(x)=a(x-1)(x-3)$, temos:

$$f(2)=a(2-1)(2-3)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$$

A função do 1º grau h possui coeficiente angular $m_h=\frac{0,5-2,5}{2-0}=-1$.

A função do 1º grau g possui coeficiente angular $m_g = \frac{0-1}{1-0} = -1$ e coeficiente linear 1, então $g(x) = -x+1$.

Como $m_g = m_h = -1$, as duas retas são paralelas e $h(x) > g(x)$ para todo x real.

A interseção dos gráficos de f e g é dada por

$$-\frac{1}{2}(x-1)(x-3) = -x+1 \Leftrightarrow (x-1)\left(-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}+1\right) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{5-x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$$

Logo, $g(x) > h(x) \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5$.

Portanto, $h(x) > g(x) > f(x)$ se $x \in \mathbb{R} - [1,5]$.

17) Sejam as funções reais dadas por $f(x) = 2^{2x+1}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. Se $b \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2g(b)$ e $p = \log_3 b$, então sobre **p** é correto afirmar que

a) não está definido.
b) é positivo e menor que 1.
c) é negativo e menor que 1.
d) é positivo e maior que 1.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = 2^{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right)} = 2^2 = 4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2g(b) \Rightarrow 2g(b) = 4 \Leftrightarrow g(b) = 2$$

$$g(x) = 3^{x+1} \Rightarrow g(b) = 3^{b+1} = 2 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{b+1}\right) = \log_3 2 \Leftrightarrow b+1 = \log_3 2 \Leftrightarrow b = -1+\log_3 2$$

Note que $2 < 3 \Leftrightarrow \log_3 2 < \log_3 3 = 1 \Leftrightarrow -1+\log_3 2 < 0$, ou seja, $b < 0$.

Sabemos que o logaritmando deve ser sempre positivo, então $p = \log_3 b$ não está definido.

18) Sobre a função real f definida por $f(x) = -1-|6(\operatorname{sen} x)(\cos x)|$, é **INCORRETO** afirmar que:

a) $\operatorname{Im}(f) = [-1, 2]$.

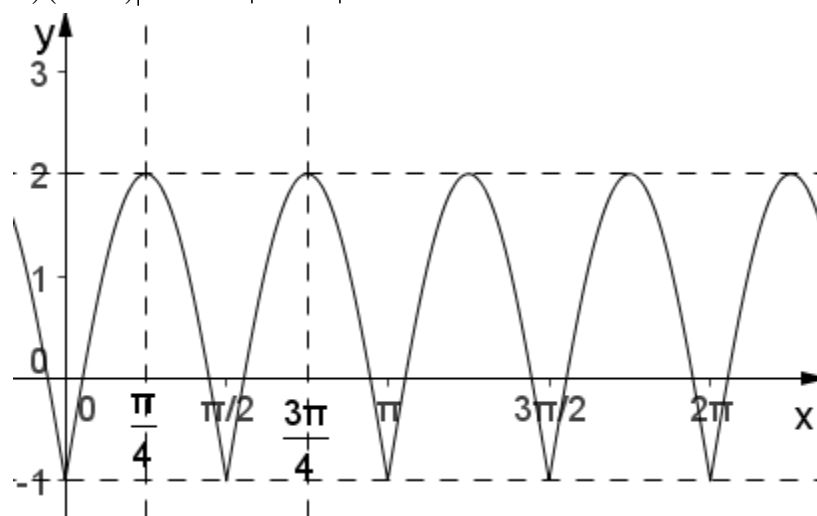
b) é decrescente para todo $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) possui 8 raízes no intervalo $[0, 2\pi]$.

d) tem período igual ao período da função real g dada por $g(x) = 2f(x)$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$f(x) = -1 + |6(\text{sen } x)(\cos x)| = -1 + 3|\text{sen } 2x|$

a) CORRETA: $\text{Im}(f) = [-1, 2]$

b) INCORRETA: $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow$ f(x) é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ e crescente de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c) CORRETA: há 8 raízes em $[0, 2\pi]$.

d) CORRETA: O período de f(x) é $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. O período de $g(x) = 2f(x)$ é o mesmo de f, pois a multiplicação por 2 somente altera a amplitude da senoide, não afetando o seu período.

19) A Revista Época publicou uma reportagem em fevereiro de 2009 a respeito do impacto da crise financeira mundial no crescimento da economia.

**Desaceleração recorde**
Em 2009, a economia mundial deverá ter o menor crescimento desde a 2ª Guerra Mundial – em % ao ano.
O gráfico abaixo indica o percentual de crescimento da economia mundial de alguns anos, no período de 1980 a 2009.

Fonte: Revista Época – 02/02/2009/n.º 559 – pág. 85 (Adaptado)

Sabendo-se que no ano de 2009 o percentual foi estimado, analise o gráfico e marque a alternativa **FALSA**.

a) Houve um aumento superior a 42% do percentual de crescimento do ano de 1995 para o ano 2000.
b) A queda de crescimento do ano de 2005 para o percentual estimado no ano de 2009 é menor que 90%.
c) O aumento do percentual de crescimento do ano de 1985 em relação ao ano de 1980 é aproximadamente 95%
d) A taxa de crescimento do ano de 2000 em relação ao ano de 1985 é a mesma que a taxa de crescimento do ano de 1990 em relação ao ano de 1980.

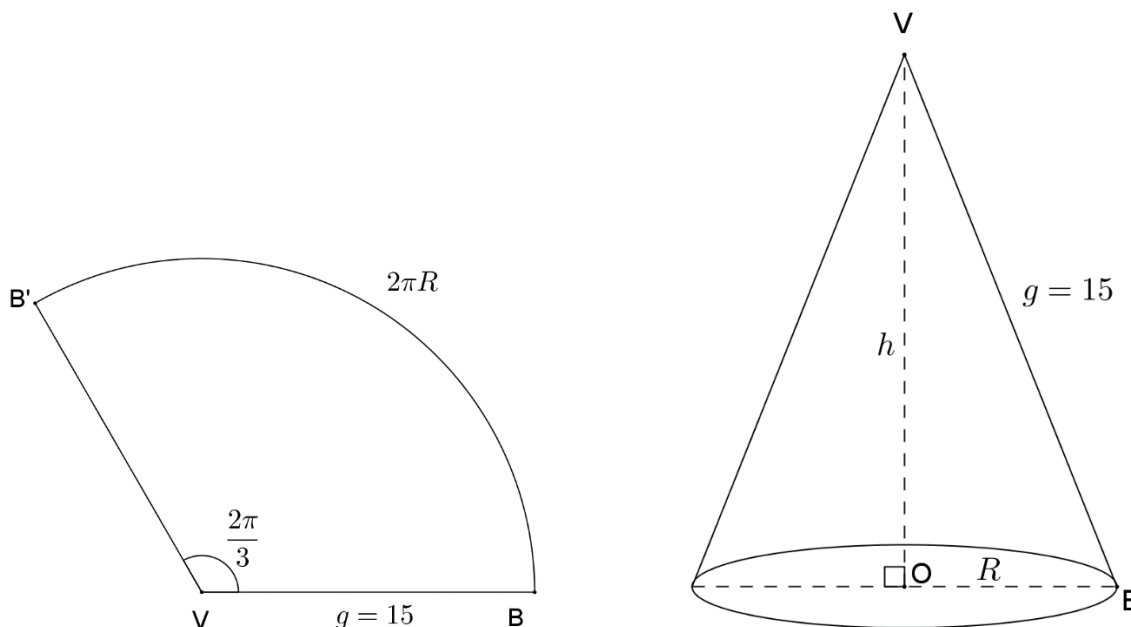
RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
a) VERDADEIRA
Aumento do percentual de crescimento do ano de 1995 para o ano 2000: $\frac{4,7-3,3}{3,3}\cdot 100\% \approx 42,4\% > 42\%$
b) VERDADEIRA
Queda de crescimento do ano de 2005 para o percentual estimado no ano de 2009: $\left|\frac{0,5-4,5}{4,5}\right|\cdot 100\% \approx 88,9\% < 90\%$.
c) VERDADEIRA
Aumento do percentual de crescimento do ano de 1985 em relação ao ano de 1980: $\frac{3,7-1,9}{1,9}\cdot 100\% \approx 95\%$.
d) FALSA
Taxa de crescimento de 2000 em relação a 1985: $\frac{4,7-3,7}{3,7} \approx 27\%$

Taxa de crescimento de 1990 em relação a 1980: $\frac{2,9-1,9}{1,9} \approx 53\%$

20) Considere uma chapa de aço circular de espessura desprezível e raio 15 cm. Recortando-se, dessa chapa, dois setores circulares de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad cada, e juntando-se em cada um desses setores os lados de mesma medida, sem perda de material, obtém-se dois objetos em forma de cone.
Unindo-se as bases desses cones, obtém-se um objeto **A.**
Dentro de um cilindro suficientemente grande e repleto de água até a borda foram inseridas esferas de ferro cuja área da superfície de cada uma é $9\pi\ \text{cm}^2$. A cada esfera inserida a água que transbordava era recolhida e armazenada dentro do objeto A
Foram inseridas esferas dentro do cilindro até que o líquido que estava sendo armazenado no objeto A transbordasse. Quantas esferas foram inseridas?
Dado: $\sqrt{2}$ =1,41
a) 50
b) 51
c) 52
d) 53

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**

O cone formado possui $g = 15$ cm. Sejam R e h, o raio da base e a altura do cone, respectivamente.

O perímetro da base do cone é tal que $\frac{2\pi}{3} \cdot g = 2\pi \cdot R \Leftrightarrow g = 3R \Leftrightarrow 15 = 3R \Leftrightarrow R = 5$

A altura h do cone é dada por $h^2 + 5^2 = 15^2 \Leftrightarrow h^2 = 225 - 25 = 200 \Leftrightarrow h = 10\sqrt{2}$.

O volume de cada cone é $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 10\sqrt{2} = 117,5\pi \text{ cm}^3$.

O volume do objeto A é $V_A = 2 \cdot V_{cone} = 2 \cdot 117,5\pi = 235\pi \text{ cm}^3$.

Seja r o raio das esferas, então $S_{esfera} = 4\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$.

O volume de cada esfera é $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 4,5\pi \text{ cm}^3$.

A cada nova esfera inserida no cilindro, o volume do líquido que transborda e é armazenado no objeto A é igual ao volume da esfera. Seja $n \in \mathbb{N}$ a quantidade de esferas inseridas no cilindro, então queremos identificar o menor valor de n tal que $n \cdot V_{esfera} \geq V_A$. Assim, temos:

$n \cdot 4,5\pi \geq 235\pi \Leftrightarrow n \geq 52,222\ldots \Rightarrow n_{min} = 53$.

---

**Acompanhe o blog [www.madematica.blogspot.com](www.madematica.blogspot.com) e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!**

**Volumes já lançados:**

**Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015**